

Gunta LĀCE, Universität Lettlands

Von den Schülern gewählten Strategien für die Lösung der Problemaufgaben in der Kombinatorik

Die Aufgaben, die Kombinatorik rechnet, kann man in fünf Gruppen einteilen:

- Gibt es ein Objekt, das den gegebenen Anforderungen entspricht?
- Mindestens ein Objekt entsprechend den gegebenen Anforderungen finden!
- Wie viele Objekte entsprechend den gegebenen Anforderungen gibt es?
- Einen Algorithmus finden, mit dem man alle Objekte konstruieren kann, die den gegebenen Anforderungen entsprechen.
- Ein irgendwie extremales Objekt zu finden, der den gegebenen Anforderungen entspricht.

In dieser Untersuchung wurde festgestellt, welche Strategien für die Lösung der Problemaufgaben die Schüler aus verschiedenen Altersgruppen (Klassen 5-6, Klassen 7-8, Klassen 9-10) wählen. An der Untersuchung nahmen die Schüler teil, deren Allgemeinkenntnisse und Fertigkeiten in der Mathematik auf einem optimalen Niveau sind. (Nach dem lettischen Leistungsbewertungssystem werden die Schülerleistungen als ungenügend bewertet, wenn sie in der Abschlussarbeit weniger als 35% der Gesamtpunktzahl erreichen, genügend – bei 35-60%, optimal – bei 61-90%, ausgezeichnet – bei mehr als 90% von der Gesamtpunktzahl. Insgesamt in dieser Untersuchung haben 16 Schüler der 6-ten Klassen, 12 Schüler der 7-ten Klassen und 16 Schüler der 9-ten Klassen teilgenommen. Die Untersuchungsteilnehmer haben vorher keine Kombinatorikaufgaben gelöst. Die Ergebnisse der Untersuchung wurden durch die Analyse der Videoaufnahmen und durch die Rückmeldungen der Schüler über ihre Vorgehensweise bei der Lösung der Problemaufgaben festgestellt.

Die Untersuchungsteilnehmer haben individuell gearbeitet. Sie sollten die folgende Aufgabe lösen:

Wie viele verschiedene zweistellige Zahlen kann man aus den gegebenen Ziffern bilden:

- a) 1, 2;
- b) 1, 2, 3;
- c) 1, 2, 3, 4,;
- d) 1, 2, 3, 4, 5;
- e) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7;

Die Lösungszeit wurde nicht begrenzt. Wenn die Schüler wollten, durften sie Fragen an den Untersucher stellen. Am Anfang wurde geplant, dass der

Untersucher sich nur dann in die Arbeit einmischen wird, wenn die Schüler ihm die Fragen stellen. Aber solche Situation ist nicht vorgekommen, weil **alle** Schüler der sechsten Klasse bei der Lösung die gleichen Fehler zugelassen haben. Sie waren überzeugt, dass die Ziffern in der Zahl unterschiedlich sein sollen, das bedeutet, dass sie schon im Beispiel a) nur die Zahlen 12 und 21 geschrieben haben, aber sie hatten keine 11 und 22. Wenn dieser Fehler nicht beseitigt würde, würde das Ziel der Untersuchung nicht erreicht.

Ein Beispiel: ein typisches Gespräch zwischen dem Untersucher und einem Sechsklässler;

Schüler: *Liest die Aufgabenstellung schnell durch und ohne nachzudenken schreibt auf*

a) 12; 21;

b) 12; 21; 13; 31; 23; 32;

Untersucher: Bist du sicher, dass du alle Zahlen aufgeschrieben hast?

Schüler: *Schaut das Geschriebene schnell durch. Ich denke ja. Gibt es noch was?*

Untersucher: Ja, natürlich.

Schüler: *Schaut mehrmals das Geschriebene durch, gleichzeitig fährt er mit dem Finger mit. Ich weiß nicht, es gibt nichts mehr. (mehrere Schüler schreiben die Zahlen 1,2 und 2,1 hinzu)*

Untersucher: Kannst du nacheinander die kleinsten zweistelligen Zahlen langsam nennen?

Schüler: 10, 11, 12, 13...

Nur 7 von 16 Schülern haben bei 11 aufgehört. Die anderen haben weitergezählt. Niemand von den Untersuchungsteilnehmern hat ohne zu zweifeln die Zahl 11 in die Lösung hineingetragen. Alle (!) haben erstaunt gefragt, ob man auch solche Zahl hineintragen kann?

Obwohl man festgestellt wird, dass die Aufgabenstellung auch die Zahlen erfüllen, deren Ziffern gleich sind, trotzdem werden sie als Ausnahmen betrachtet und am Ende geschrieben. Zum Beispiel: 12; 21; 13; 31; 23; 32; 11; 22; 33.

80% der Untersuchungsteilnehmer haben am Anfang alle Zahlen geschrieben, die die Aufgabenstellung erfüllen, und danach haben sie sie addiert. 20% der Untersuchungsteilnehmer haben alle Zahlen in den Beispielen a), b), c) und d) geschrieben. Bei dem Beispiel e) haben sie geahnt, dass es einen günstigeren Weg sein soll, um diese Aufgabe zu lösen. 4 Schüler haben erfunden, wie viele Zahlen gibt es, ohne sie alle aufzuschreiben. Die anderen 6 haben nachgedacht, aber danach haben sie sowieso alle 49 Zahlen aufgeschrieben.

Die Schüler, die die Lösung gefunden haben, ohne das Aufschreiben aller Zahlen, wurden aufgefordert ihre Lösungsmethode zu begründen. Diese Schüler hatten Schwierigkeiten bei der Verwendung konkreter Begriffe, deshalb haben sie selber festgestellt, dass sie von der Richtigkeit der Lösung überzeugt sind, aber die nicht begründen können.

Der Unterschied zwischen den Lösungen der Schüler der Klassen 7 und 6 lag darin, dass die älteren Schüler schon im Beispiel d) eine allgemeinere Lösungsstrategie herauszufinden versucht haben.

In den vorhandenen Lehrwerken in der lettischen Sprache werden solche Übungen mit Hilfe von Multiplizieren gelöst. Zum Beispiel: wenn man die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 benutzen darf, dann denkt man so: die erste Ziffer der zweistelligen Zahl kann man siebenartig wählen; nach jeder Ziffer kann man eine von den 7 Ziffern schreiben. Also man kann insgesamt $7 \cdot 7 = 49$ Zahlen schreiben. Nur ein Untersuchungsteilnehmer hat diese Strategie genutzt. Die anderen Schüler, die nach einer allgemeinen Lösungsstrategie gesucht haben (10 von 13), stützten sich auf die vorher gewonnenen Ergebnisse. Die typische Begründung eines Schülers der siebten Klasse warum man mit Hilfe von fünf Ziffern 25 verschiedene zweistellige Zahlen bilden kann:

Wenn es vier Ziffern vorgegeben sind, dann kann man 16 Zahlen schreiben (sie werden einfach aufgeschrieben und addiert). Wenn man die Ziffer 5 benutzt, kann man vier Zahlen aufgeschrieben, in denen 5 die erste Ziffer ist: 51, 52, 53, 54. Und 4 Zahlen, in denen 5 die zweite Ziffer ist: 15, 25, 35, 45. Es gibt noch die Zahl 55. Also insgesamt kann man $16 + 4 + 4 + 1 = 25$ Zahlen bilden.

Nur 8 von den Schülern der sechsten und siebten Klassen haben die Zahlen nacheinander aufgeschrieben. Zum Beispiel: 11, 12, 13, 14, 15, 21, 22, 23, 24, 25, 31...

7 Schüler haben alle Zahlen nacheinander geschrieben, ausgenommen die, deren Ziffern gleich sind. Zum Beispiel: 12, 13, 21, 23, 31, 32, 11, 22, 33.

9 Schüler haben zuerst alle Zahlen aus dem vorigen Beispiel geschrieben, dann die, die man bilden kann, in dem man die nächste Ziffer hinzufügt. Zum Beispiel: 12, 13, 21, 23, 31, 32, 11, 22, 33, 14, 41, 24, 42, 34, 43, 44.

Im Allgemeinen haben die Schüler der sechsten und siebten Klassen die Aufgaben mit Spaß und Erfolg gelöst. Es gab wenig Fehler. Die Fehler sind überwiegend dann entstanden, weil die Schüler zu unaufmerksam die geschriebenen Zahlen addiert haben. Die Aufgabe wurde in 7 – 13 Minuten gelöst.

Krasse Unterschiede gab es in der Lösungsweise der Schüler der neunten Klasse. 3 von 17 Untersuchungsteilnehmern der neunten Klasse hatten eine ähnliche Lösungsstrategie wie die jüngeren Schüler.

4 von 17 Schülern haben sofort die allgemeine Strategie gewöhnt, das heisst, sie haben im Kopf oder schriftlich gerechnet, wie viele Zahlen entsprechend der Aufgabenstellung gibt es. Der Schnellste hat das in zwei Minuten gemacht. Diese Schüler konnten in Vergleich zu den jüngeren Schülern auch ihre Lösung besser begründet. Trotzdem haben auch in der neunten Klasse 3 Schüler ihre Lösung so begründet – *so ist es einfach und alles. Ich denke, dass die Lösung richtig ist, aber ich kann nicht erklären warum.*

3 Schüler konnten die Aufgabe nicht lösen. Sie alle haben sich bemüht eine allgemeine Lösung zu finden, aber wenn sie Pech hatten, haben sie gar nicht versucht die Zahlen entsprechend der Aufgabenstellung zu schreiben und sie einfach zu addieren. Auf die Frage des Untersuchers: Warum? – haben sie mit der Gegenfrage geantwortet: Darf man so schreiben?

4 Schüler haben versucht zuerst allgemein zu denken, aber dann haben sie sich entschieden die gefragten Zahlen aufzuschreiben. Sie brauchten eine längere Lösungszeit. Die längste Lösungszeit war 32 Minuten.

Schlussfolgerungen:

Die Ergebnisse der Untersuchung bestätigen die Annahme, dass man die Aufgaben der Kombinatorik in jede von den untersuchten Altersgruppen in den Mathematikunterricht einsetzen kann.

Die verhältnismäßig schlechten Ergebnisse der Schüler der neunten Klasse kann man damit begründen, dass sie die Lösungsstrategien der Kombinatorikaufgaben sich nicht angeeignet haben, deshalb in allgemeiner Weise können sie nur einige Aufgaben lösen, aber eine Lösung durch die Versuche scheint für sie nicht akzeptabel.

Bei der Einsetzung der Kombinatorikaufgaben in den Lerninhalt wenigstens seit der fünften Klasse, hätten die Schüler eine Möglichkeit die Lösungsstrategien auf dem Versuchsweg auszuarbeiten, denn in diesem Alter ist Experimentieren für sie ein völlig natürlich.

Die Forschung wurde mit Unterstützung der Europäischen Sozialfonds durchgeführt.

Literatur:

www.liis.lv

Leuders Timo (Hrsg.). Mathematik Didaktik. Cornelsen Verlag Scriptor GmbH&Co. KG, Berlin. 2003.

France I., Lace G., Pickaine L., Miķelsone A.. Matematika 7. Klasei. Lielvards. Riga. 2007. (Lettisch)