

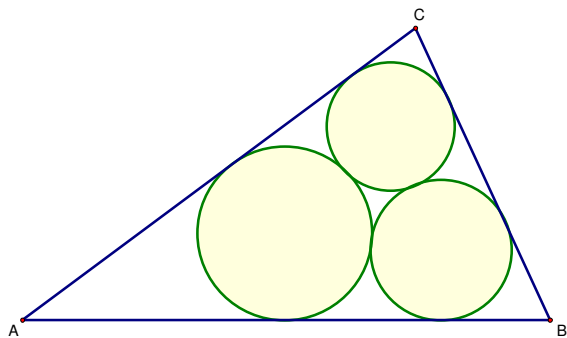
Ingmar LEHMANN, Berlin

Das Malfatti-Problem – Ein Thema in der Begabtenförderung

1. Die Malfatti-Story

1802 fand der italienische Mathematiker Malfatti (1731–1807) eine Lösung der folgenden Aufgabe, die er 1803 dann veröffentlichte [1]:

Wie lassen sich in ein gegebenes Dreieck drei sich nicht überlappende Kreise so einbetten, dass ihre Gesamtfläche möglichst groß ist?



Malfatti konstruierte die drei Kreise derart, dass sie einander und je zwei Seiten des Dreiecks berühren. Dazu berechnete er zunächst die drei Tangentenabschnitte dieser Kreise.

Das ursprüngliche Problem, ein so genanntes „Packungsproblem“,

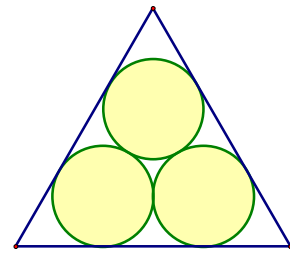
lautete ein wenig anders. Für die weiteren Betrachtungen bezeichnen wir dieses Problem als das *erste* (oder ursprüngliche) *Malfatti-Problem*. Den Fall des gleichschenkligen Dreiecks hatte schon der schweizerische Mathematiker Jacob Bernoulli (1654–1705) betrachtet. Der ebenfalls aus der Schweiz stammende Jakob Steiner (1796–1863) fand 1826 [2] eine elegante Konstruktion für ein beliebiges Dreieck.

In der Literatur wurde immer wieder behauptet, Steiner habe keinen Beweis für seine Lösung angegeben. Richard Guy [3] stellt jedoch fest, dass Steiner einen solchen Beweis erbracht hat – wenn auch verstreut über mehrere Abschnitte innerhalb zweier Arbeiten.

Auch weitere Mathematiker – wie z. B. Plücker, Cayley und Clebsch – zog dieses Problem an. Aber sie alle glaubten – wie schon Malfatti –, die Lösung erfordere, dass jeder der drei Kreise genau zwei der Dreiecksseiten als Tangenten haben müsse. Nachdem seit 1803 niemand an dieser Lösung Malfattis gezweifelt hatte, entdeckten dann jedoch 1929 Lob und Richmond [4] etwas Merkwürdiges. Sie konnten zeigen, dass Malfatti sich für den Fall des gleichseitigen Dreiecks geirrt hat.

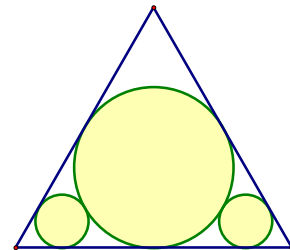
Malfattis Lösung für den Fall des gleichseitigen Dreiecks erreicht eine Bedeckung von fast 73 %; genau: $(\sqrt{3} - \frac{3}{2}) \cdot \pi \approx 0,729$.

Diese 73 % konnten Lob und Richmond jedoch noch einmal um 1 % steigern! Dazu muss einer der drei Kreise selbst maximal werden, also zum Inkreis werden – und folglich alle drei Seiten des gleichseitigen Dreiecks berühren. In zwei Ecken werden zwei „kleine“ (gleichgroße) Kreise platziert. Diese Konfiguration erreicht eine Bedeckung des Dreiecks von fast



74 %; genau: $\frac{11\sqrt{3}}{81} \cdot \pi \approx 0,739$.

Damit war klar, dass die sogenannten *Malfatti-Kreise*, also jene drei Kreise, die jeweils genau zwei der Dreiecksseiten als Tangenten haben, nicht die maximale Bedeckung eines Dreiecks liefern.

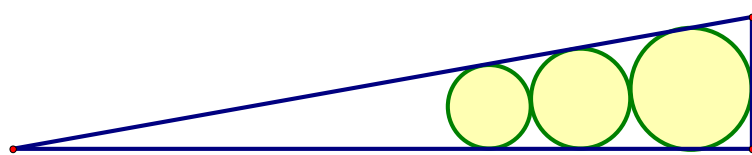


Die Verbesserung um etwa 1 % ist dabei marginal. Entscheidend ist, dass Lob und Richmond mit Hilfe eines Spezialfalls eine zuvor stillschweigend vorausgesetzte Annahme, dass also die Kreise einander und je genau zwei Seiten des Dreiecks berühren, grundsätzlich zu Fall gebracht haben.

Aber es kommt noch dramatischer!

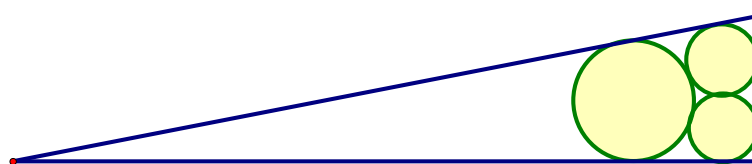
1965 findet Howard W. Eves (1911-2004) etwas noch Seltsameres [5]:

Wenn nämlich das (rechtwinklige) Ausgangsdreieck lang und schmal ist, sieht man mit bloßem Auge, dass Malfattis Lösung nicht stimmt.



Offenbar bedecken die nebeneinander liegenden Kreise (hier etwa 50 % Bedeckung)

einen größeren Anteil des Dreiecks als im folgenden Fall mit den drei Malfatti-Kreisen (hier etwa 35 % Bedeckung):

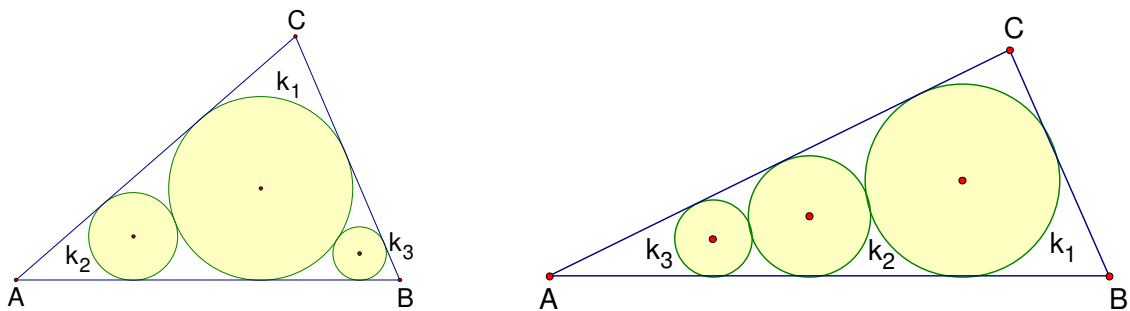


Zieht man letzteres nur lang genug, sinkt die Bedeckung unter 1 %.

Wer nun aber glaubt, damit sei es noch nicht genug der Kuriosa, mit denen sich die Mathematiker im Hinblick auf die Maximierung der drei Kreise konfrontiert sahen, wurde zwei Jahre später eines Besseren belehrt. 1967 zeigte Michael Goldberg [6], dass Malfattis „Lösung“ *niemals* korrekt ist – und zwar unabhängig von der Form des gewählten Dreiecks.

Das war ein Paukenschlag! Richard Guy formuliert dies so, dass Malfatti letztendlich sein eigenes Problem missdeutet hat.

Die richtige Lösung nutzt *stets* den Inkreis des Ausgangsdreiecks als einen der drei Kreise, m.a.W., einer der Kreise berührt stets alle drei Seiten des Dreiecks. Eine solche Konfiguration hat damit eine der beiden folgenden Anordnungen:

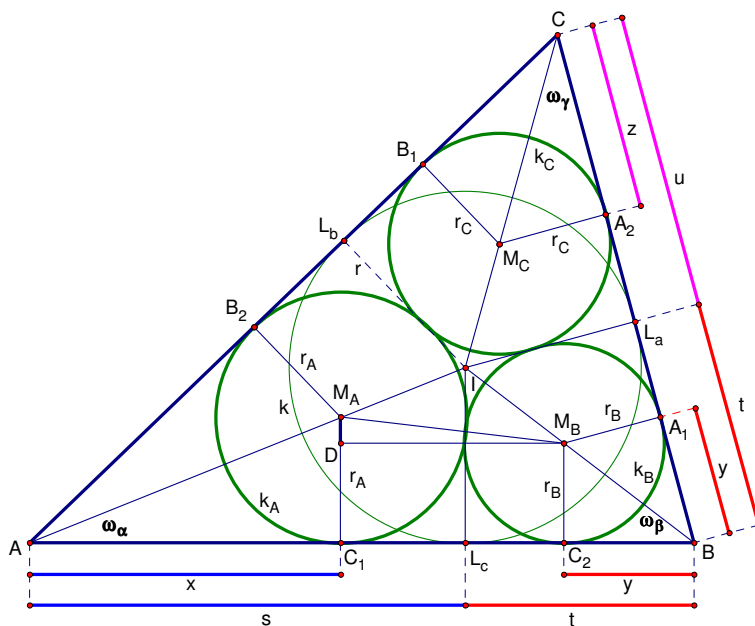


Goldberg nutzte für seine Lösung Berechnungen und Zeichnungen. Einen vollständigen mathematischen Beweis liefern 1992 erstmals Zalgaller und Los' [7]. Nichtsdestotrotz – 2007 (bzw. für Eingeweihte schon 2005) gab es die nächste Überraschung! Guy zeigte [3], dass der *Leuchtturm-Satz* u.a. auch auf die Konstruktion der Malfatti-Kreise angewendet werden kann.

2. Konstruktion der Malfatti-Kreise

Eine elementargeometrische Konstruktion, die auf vorherige algebraische Berechnungen verzichtet, ist relativ anspruchsvoll.

2.1 Konstruktion nach Malfatti (Variante mit vorherigen Berechnungen)



- $\triangle ABC$, Seiten a, b, c ;
- Winkel α, β, γ ;
- Winkelhalbierende $w_\alpha, w_\beta, w_\gamma$;
- Inkreis $k (I, r)$;
- Malfatti-Kreise k_A, k_B, k_C mit M_A, M_B, M_C und r_A, r_B, r_C ;
- Berührungspunkte mit den Dreiecksseiten

Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras und der Ähnlichkeit von Dreiecken ergeben sich die drei folgenden Gleichungen

$$x + y + \frac{2r\sqrt{xy}}{\sqrt{st}} = s + t, \quad y + z + \frac{2r\sqrt{yz}}{\sqrt{tu}} = t + u, \quad z + x + \frac{2r\sqrt{zx}}{\sqrt{us}} = u + s.$$

Aus diesen Gleichungen erhalten wir als Lösungen die Tangentenabschnitte x , y und z an die Malfatti-Kreise

$$x = \frac{1}{2} (s + t + u - r + \sqrt{r^2 + s^2} - \sqrt{r^2 + t^2} - \sqrt{r^2 + u^2}),$$

$$y = \frac{1}{2} (s + t + u - r - \sqrt{r^2 + s^2} + \sqrt{r^2 + t^2} - \sqrt{r^2 + u^2}) \text{ und}$$

$$z = \frac{1}{2} (s + t + u - r - \sqrt{r^2 + s^2} - \sqrt{r^2 + t^2} + \sqrt{r^2 + u^2}).$$

Malfatti teilte im Übrigen die Lösungen nur mit. Der Weg, auf welchem er sie fand, sei sehr kompliziert, wie er angibt¹.

Aus diesen Lösungen lassen sich nun die Malfatti-Kreise konstruieren, da die Quadratwurzeln mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind. Somit ist die gesamte Aufgabe mit Zirkel und Lineal lösbar.

Mit dem Inkreismittelpunkt I und dem Inkreisradius r sind \overline{AI} , \overline{BI} , \overline{CI} konstruierbar, also auch s , t , u bekannt (durch die Lote von I auf die Seiten). Die geometrische Konstruktion von x , y , z gestaltet sich sogar recht einfach, wenn noch folgende Beziehungen beachtet werden:

$$|\overline{AI}| = \sqrt{r^2 + s^2}, \quad |\overline{BI}| = \sqrt{r^2 + t^2}, \quad |\overline{CI}| = \sqrt{r^2 + u^2}.$$

Die entscheidende Hilfsstrecke \overline{PQ} hat die Länge

$$m = \frac{1}{2} (\sqrt{r^2 + s^2} + \sqrt{r^2 + t^2} + \sqrt{r^2 + u^2} - s - t - u + r).$$

Für diese Strecke gilt nämlich dann

$$x = |\overline{AI}| - m, \quad y = |\overline{BI}| - m, \quad z = |\overline{CI}| - m.$$

Konstruktion

Dreieck $\triangle ABC$, Winkelhalbierenden, Inkreis $k(I, r)$, damit \overline{AI} , \overline{BI} , \overline{CI} Berührungspunkte von k mit den Dreiecksseiten liefern s , t , u

Konstruktion der Hilfsstrecke \overline{PQ}

¹ Zur Lösung dieses Gleichungssystems vgl. [8].

\overline{PQ} : (1) $|\overline{AI}|$, (2) $+|\overline{BI}|$, (3) $+|\overline{CI}|$, (4) $-s$, (5) $-t$, (6) $-u$, (7) $+r$, (8) halbieren

Konstruktion von Hilfsstrecken der Längen x , y bzw. z

Abtragen dieser Hilfsstrecken im Dreieck, damit die Berührungspunkte $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$

Senkrechten in diesen Berührungspunkten schneiden die Winkelhalbierenden in den gesuchten Mittelpunkten M_A, M_B, M_C der Malfatti-Kreise k_A, k_B, k_C mit den Radien r_A, r_B, r_C

Anmerkung

Es gibt acht Lösungen für den Fall, dass die Mittelpunkte M_A, M_B, M_C der Malfatti-Kreise auf den sich im Mittelpunkt I des Inkreises schneidenden Winkelhalbierenden $w_\alpha, w_\beta, w_\gamma$ liegen.

2.2 Konstruktion nach Steiner-Petersen

(Variante ohne vorherige Berechnungen)

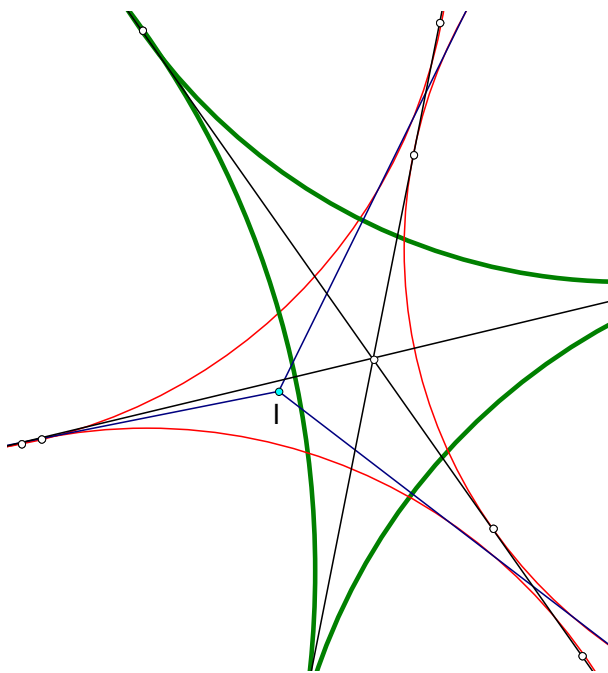
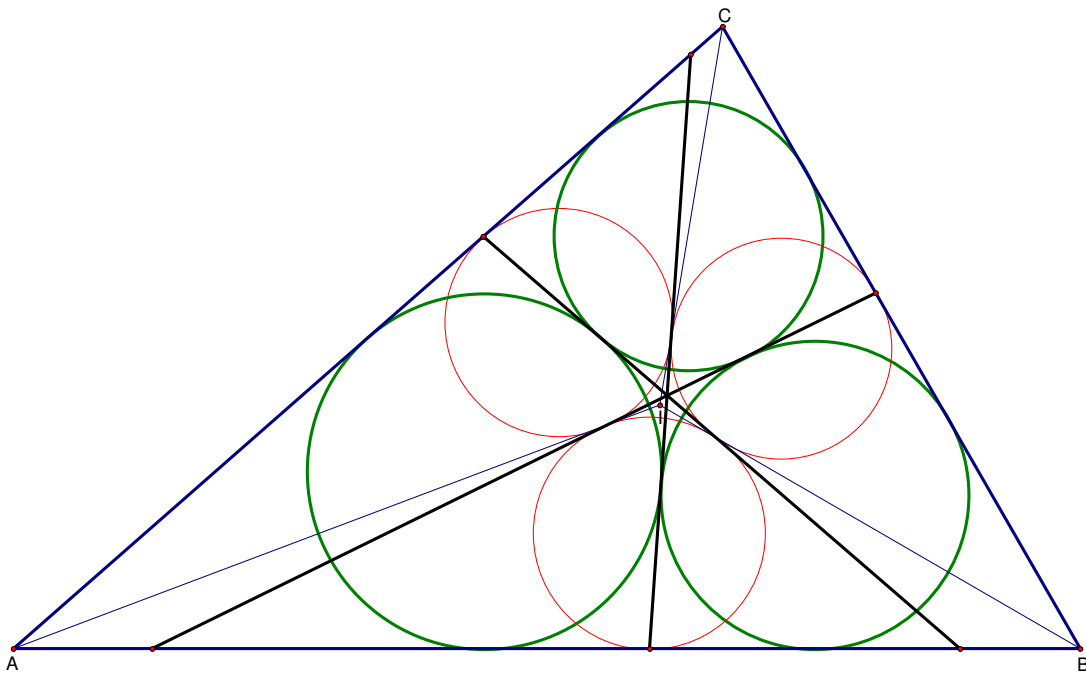
Steiner wies darauf hin, dass seine Konstruktion mit Hilfe der Kreispotenzsätze begründet werden könne, und verallgemeinerte die Aufgabe noch, indem er anstelle der drei Seiten eines Dreiecks drei Kreisbögen voraussetzte. Steiner selbst gab – wie man bis vor kurzem glaubte – keinen Beweis seiner Konstruktion an. Deshalb schrieb man zunächst Schröter (1874) das Verdienst zu, diesen Satz zuerst bewiesen zu haben [9]. Eine einfachere Ableitung – ohne den Begriff der *Inversion* – geht auf Petersen (1879) zurück [10]. Ihm gelang eine elementargeometrische Lösung, die ich für die Schule zumindest für durchführbar halte. Diese Variante ist im Übrigen wenige Jahre später sogar schon in ein Schulbuch für Gymnasien, Realgymnasien und Realschulen aufgenommen worden [11].

Noch 1962 werden im *Handbuch der Schulmathematik* die Malfatti-Kreise behandelt [12]. Allerdings wird hier der Begriff der *Inversion* eingesetzt, der im Rahmenplan nicht vorkommt. Danach verlieren sich die Spuren Malfattis in der Schulmathematik.

Die entscheidende Stelle in der ganzen Konstruktion beruht auf einem Satz, den Steiner 1826 fand:

Jede der gemeinsamen Tangenten der Malfatti-Kreise berührt zugleich zwei der drei Inkreise der drei Teildreiecke $\triangle BCI, \triangle CAI, \triangle ABI$, wobei I der Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks $\triangle ABC$ ist.

Zur Veranschaulichung zeigen wir hier diesen Zwischenschritt.



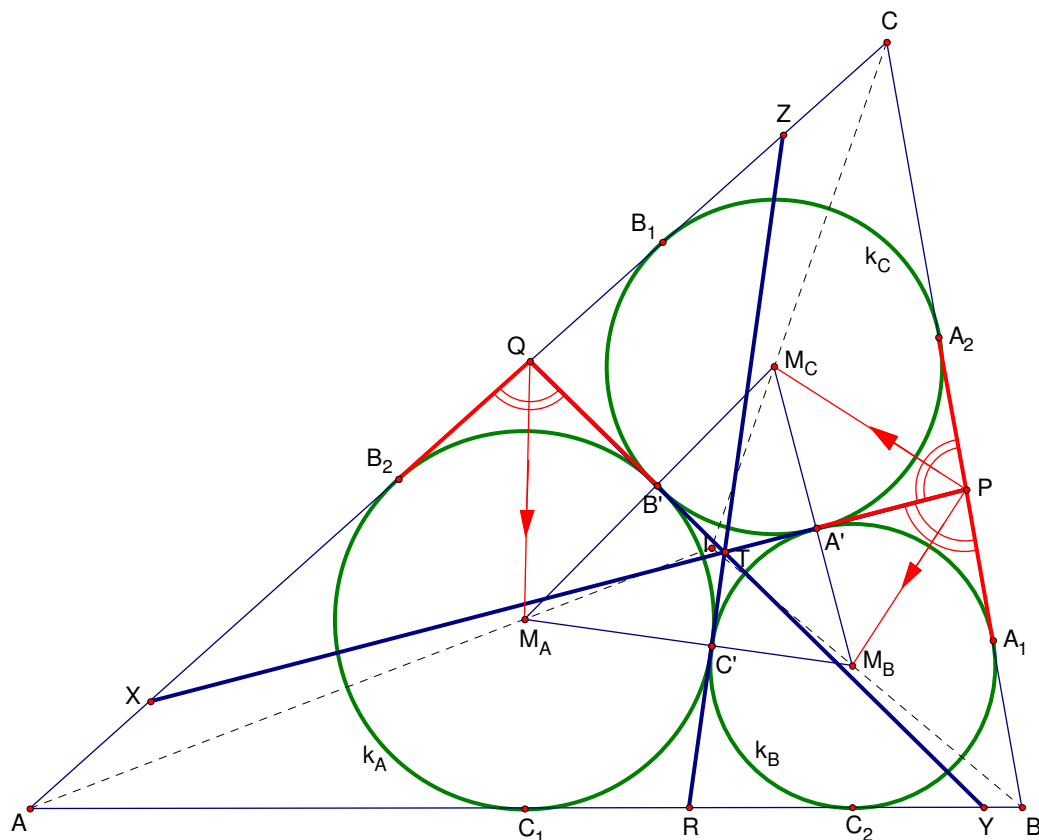
Die Inkreise berühren sich (im allgemeinen Fall) nicht; sie werden aber eben doch auch von den Tangenten der Malfatti-Kreise berührt, allerdings in unterschiedlichen Punkten.

Inkreise: dünn,

Malfatti-Kreise: fett

Vorüberlegungen (Analysis)

a) Die Mittelpunkte M_A , M_B , M_C der Malfatti-Kreise k_A , k_B , k_C mit den Radien r_A , r_B , r_C müssen auf den Winkelhalbierenden w_α , w_β , w_γ der drei Innenwinkel α , β , γ liegen.



b) Um die Malfatti-Kreise konstruieren zu können, benötigen wir den Mittelpunkt I des Inkreises k (als Schnittpunkt der Winkelhalbierenden).

c) Die Eigenschaft, dass sich die drei Malfatti-Kreise paarweise (in den Punkten A' , B' , C') berühren, erfordert zwischen je zwei dieser Kreise eine gemeinsame Tangente.

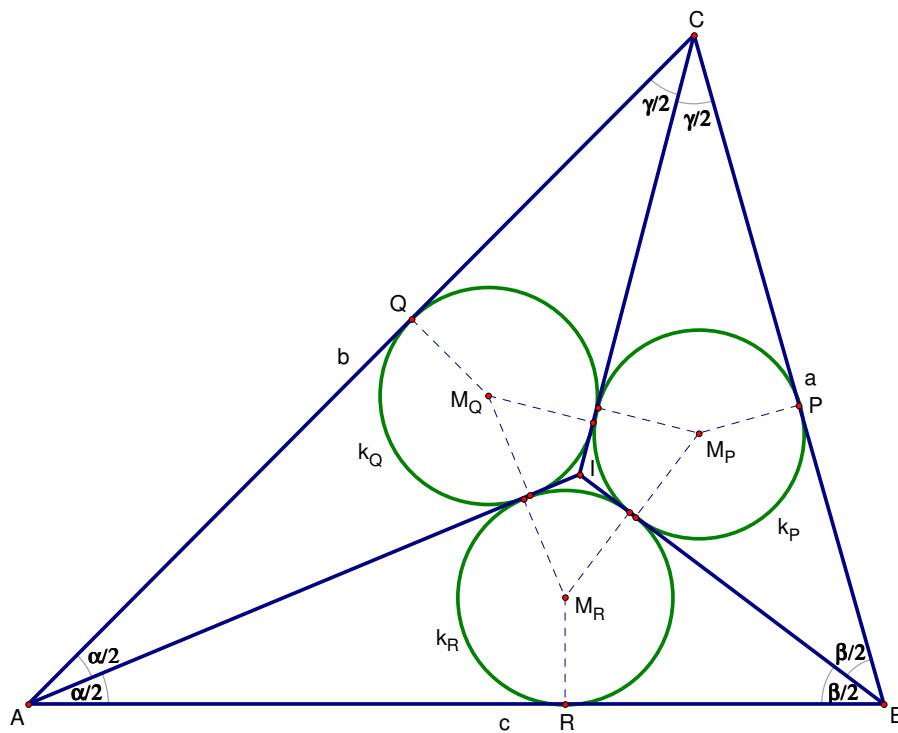
Könnte man diese Tangenten konstruieren (etwa PX und QY), so erhielte man die Mittelpunkte der gesuchten Berührkreise durch die Konstruktion von weiteren Winkelhalbierenden:

- Winkelhalbierende des Winkels $\angle A_QY$ schneidet w_α im Punkt M_A ,
- Winkelhalbierende des Winkels $\angle BPX$ schneidet w_β im Punkt M_B ,
- Winkelhalbierende des Winkels $\angle CPX$ schneidet w_γ im Punkt M_C .

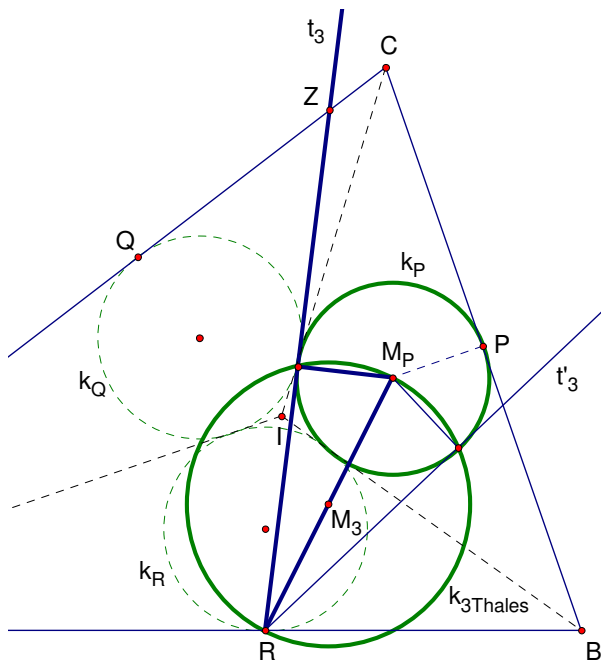
d) Erstaunlicherweise erhält man die Tangentenpunkte P , Q , R als Berührungspunkte von drei Hilfskreisen mit den Dreiecksseiten. Diese Hilfskreise k_P , k_Q , k_R sind gerade die Inkreise der drei Teildreiecke $\triangle BCI$, $\triangle CAI$, $\triangle ABI$, die durch die Konstruktion der Winkelhalbierenden w_α , w_β , w_γ entstehen.

e) Die gesuchten Geraden

PX , QY , RZ (bzw. \overline{PX} , \overline{QY} , \overline{RZ}) sind nun gerade die Tangenten von den Punkten P , Q , R an die Hilfskreise k_P , k_Q , k_R .



Tangente t_3 von R an den Hilfskreise k_P :



Der Thaleskreis $k_{3\text{Thales}}$ über $\overline{RM_P}$ (mit dem Mittelpunkt M_3) liefert zwei Berührungspunkte mit dem Kreis k_P ($M_P, |\overline{M_P I}|$).

Die Tangente t_3 schneidet die Seite \overline{AC} im Punkt Z .

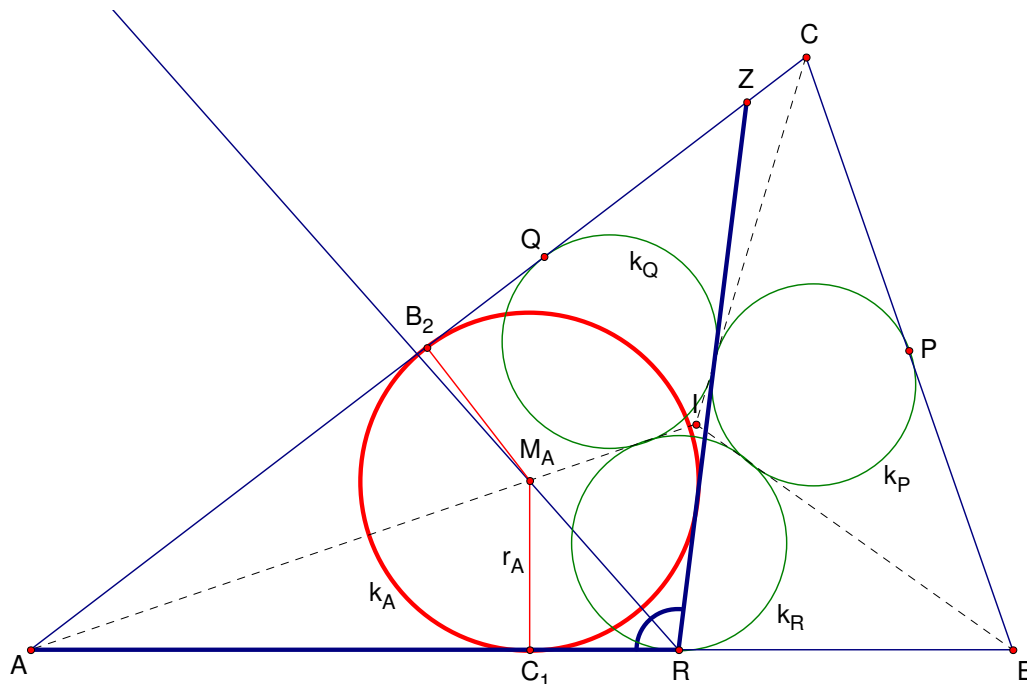
(Die zweite Tangente t'_3 von R an den Hilfskreise k_P benötigen wir nicht.)

Analog werden dann die Punkte X und Y konstruiert.

f) Die Winkelhalbierende des Winkels $\angle ARZ$ schneidet die Winkelhalbierende \overline{AI} des Winkels $\angle BAC$ im Punkt M_A , dem gesuchten Mittelpunkt unseres ersten Malfatti-Kreises k_A .

Das Lot von M_A auf die Seiten \overline{AB} und \overline{AC} liefert den gewünschten Radius $r_A = |\overline{M_A B_2}| = |\overline{M_A C_1}|$.

Die beiden weiteren Malfatti-Kreise erhalten wir analog.



Die *Konstruktion* (samt Konstruktionsbeschreibung) kann jetzt erfolgen:

- Dreieck $\triangle ABC$, w_α , w_β , w_γ , Inkreis k mit Inkreismitelpunkt I
- Inkreise k_P , k_Q , k_R der drei Teildreiecke $\triangle BCI$, $\triangle CAI$, $\triangle ABI$
- Tangentenpunkte P , Q , R als Berührungspunkte
- Tangenten von den Punkten P , Q , R an diese Inkreise (Thaleskreise)
- Konstruktion der Winkelhalbierenden der Winkel, die aus den Dreiecksseiten und \overline{PX} , \overline{QY} bzw. \overline{RZ} bestehen
- Schnittpunkte dieser (neuen) Winkelhalbierenden mit w_α , w_β , w_γ sind die Mittelpunkte M_A , M_B , M_C der Malfatti-Kreise k_A , k_B , k_C
- Konstruktion der gesuchten Malfatti-Kreise k_A , k_B , k_C (Radien r_A , r_B , r_C als Lote von den Mittelpunkten M_A , M_B , M_C auf die Dreiecksseiten)

Den *Beweis*, dass die so konstruierten Kreise die genannten Bedingungen auch erfüllen, lasse ich hier ebenso aus wie die *Determination*.

(Für die *Determination* ist zu beachten:

Die Punkte X , Y , Z treten zweimal auf. In Abhängigkeit von der Lage der Punkte A , B , C liegen sie wechselweise auf einer von zwei Dreiecksseiten.)

3. Die Malfatti-Kreise in einer mathematischen Arbeitsgemeinschaft

Ich habe das Malfatti-Problem in zwei Arbeitsgemeinschaften (Klassenstufen 10 und 11) im WS 2007/08 behandelt:

- Zirkel 10a: 14 Schüler (kein Mädchen dabei),
- Zirkel 11a: 15 Schüler, 6 Schülerinnen.

Mangelndes Vorwissen kann ich schlecht anderen anlasten; ich leite diese Zirkel im Rahmen der Mathematischen Schülersgesellschaft „Leonhard Euler“ (MSG²) jeweils seit der Klassenstufe 7.

Lehrer, die ich gefragt habe, kennen das Malfatti-Problem gar nicht – weder den Namen Malfatti noch das Problem. Allerdings gab es bereits 1875/1910 ein Schulbuch [11], das dieses Problem behandelt hat. Deutschsprachige Zeitschriften zur Mathematikdidaktik sparen das Thema nahezu völlig aus; ganz anders in den USA. Lediglich die Schülerzeitschrift *alpha* titelte 1989 einen Beitrag mit „Eine interessante geometrische Aufgabe“ [13]. 1994 widmete sich die Schülerzeitschrift *Kvant* dem Thema [14]. 2002 und 2003 behandelte die Zeitschrift *Monoid* das Problem [15].

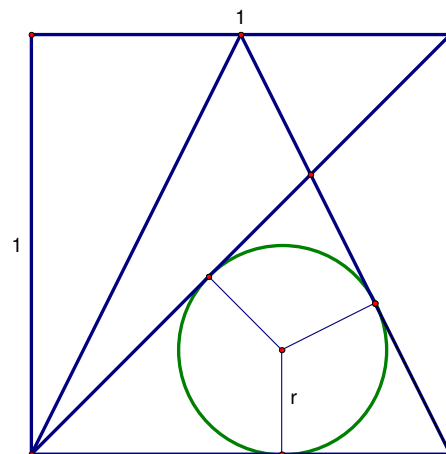
Im Netz findet man einige Seiten zum Thema. Unbedingt empfehlen kann ich die Seite von Arne Madincea³.

Zu den Malfatti-Kreisen

Eine Konstruktion der Malfatti-Kreise ist nicht trivial – das haben wir gesehen. Mein ursprünglicher Versuch, ohne vorherige algebraische Betrachtungen auszukommen, ist kläglich gescheitert. Obwohl ich eine Reihe von Sätzen aus der Elementargeometrie wiederholt hatte, fanden die Schüler keinen Zugang.

Daraufhin habe ich einen neuen Anlauf versucht, indem ich Aufgaben zur „Japanischen Tempelgeometrie“ gestellt habe. Hier ein Beispiel aus dem Jahre 1877:

Gegeben ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 und der Mittelpunkt einer Seite, der mit zwei Eckpunkten verbunden ist. Konstruiere und berechne den Radius r des Kreises (s. Figur).



Obwohl einige Schüler bei Additions- und Subtraktionstheoremen der Winkel-funktionen durchaus Nachholbedarf hatten, konnten Aufgaben dieses Typs gemeistert werden.

Das half aber letztlich wenig, sodass ich eine von mir geführte Konstruktion behandelt habe. Das schloss von mir vorgegebene Bezeichnungen ein.

² Die Homepage der MSG finden Sie unter <https://www.mathematik.hu-berlin.de>.

³ <http://www.madincea.homepage.t-online.de>. Die Seite <http://www.lutzgehlen.de/> ist zur Zeit leider nicht aufrufbar.

Zur Konstruktion nach Malfatti – Variante mit vorherigen Berechnungen

Diese Konstruktion habe ich erst nach der Steiner-Petersen-Konstruktion behandelt. Mit der Konstruktion selbst gab es keine besonderen Schwierigkeiten.

Die Herleitung der drei Gleichungen zur Berechnung der Tangentenabschnitte lässt sich mühelos erarbeiten, da Ähnlichkeit von Dreiecken und der Satz des Pythagoras zur Verfügung stehen.

$$|\overline{M_A M_B}| = r_A + r_B . \quad (1)$$

$$|\overline{DM_A}| = r_A - r_B \quad (2)$$

$$|\overline{DM_B}| = |\overline{C_1 C_2}| = c - x - y = 2\sqrt{r_A r_B} \quad (3)$$

$$|\overline{A_1 A_2}| = a - y - z = 2\sqrt{r_B r_C} \quad (4)$$

$$|\overline{B_1 B_2}| = b - z - x = 2\sqrt{r_C r_A} \quad (5)$$

$$\Delta AC_1 M_A \sim \Delta AL_c I, \Delta BC_2 M_B \sim \Delta BL_c I, \Delta CB_1 M_C \sim \Delta CL_b I$$

$$r_A = \frac{rx}{s}, \quad r_B = \frac{ry}{t}, \quad r_C = \frac{rz}{u} \quad (6), (7), (8)$$

$$c = |\overline{AB}| = |\overline{AC_1}| + |\overline{C_1 C_2}| + |\overline{C_2 B}| = x + 2\sqrt{r_A r_B} + y = u + x$$

$$x + \frac{2r\sqrt{xy}}{\sqrt{st}} + y = s + t = c \quad (9)$$

Analog folgt

$$y + \frac{2r\sqrt{yz}}{\sqrt{tu}} + z = t + u = a, \quad z + \frac{2r\sqrt{zx}}{\sqrt{us}} + x = u + s = b \quad (10), (11)$$

Ganz anders stellt sich die Situation dar, wenn es um die Lösung des Gleichungssystems geht:

$$x + y + \frac{2r\sqrt{xy}}{\sqrt{st}} = s + t, \quad y + z + \frac{2r\sqrt{yz}}{\sqrt{tu}} = t + u, \quad z + x + \frac{2r\sqrt{zx}}{\sqrt{us}} = u + s.$$

Hier geeignete Substitutionen zu finden, erfordert viel, sehr viel Erfahrung.

Ohne gezielte Hilfen werden hier Schüler nicht zum Ziel kommen.

Die Lösungen

$$x = \frac{1}{2} (s + t + u - r + \sqrt{r^2 + s^2} - \sqrt{r^2 + t^2} - \sqrt{r^2 + u^2}),$$

$$y = \frac{1}{2} (s + t + u - r - \sqrt{r^2 + s^2} + \sqrt{r^2 + t^2} - \sqrt{r^2 + u^2}) \text{ und}$$

$$z = \frac{1}{2} (s + t + u - r - \sqrt{r^2 + s^2} - \sqrt{r^2 + t^2} + \sqrt{r^2 + u^2}).$$

sollten deshalb ohne Beweis mitgeteilt werden.

Meine besten Schüler waren an dieser Stelle sehr irritiert, weil selbst der Einsatz eines Computer-Algebrasystems sie hier nicht weiterbrachte.

Aus diesen Lösungen lassen sich dann die Malfatti-Kreise problemlos konstruieren (siehe vorn), wenn noch ein Hinweis auf die Hilfsstrecke \overline{PQ} mit

$$m = \frac{1}{2} (\sqrt{r^2 + s^2} + \sqrt{r^2 + t^2} + \sqrt{r^2 + u^2} - s - t - u + r),$$

gegeben wird.

Zur Konstruktion nach Steiner-Petersen – Variante ohne vorherige Berechnungen

Die Konstruktion von Jakob Steiner (bzw. Julius Petersen) setzt zwar im Wesentlichen nur solche Elemente wie

- Kreis und Tangente (Satz des Thales – bzw. seine Umkehrung),
- Winkelhalbierende (Berührkreis an die Schenkel eines Winkels),
- Inkreis, Berührradien, Peripheriewinkel, Sehnen-Tangenten-Winkel,
- Sehnenviereck

voraus, dennoch ist diese Konstruktion insgesamt sehr schwierig.

Dabei sind die genannten Konstruktionselemente (neben den Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal) und die meisten elementargeometrischen Sätze, die benötigt werden, für sich genommen durchaus Schulstoff. Aber allein die Analysis, also die Vorüberlegungen, wie eine solche Konstruktion eventuell durchzuführen sei, sprengt doch den Rahmen einer Schulstunde. Wir haben gemeinsam – also mit meiner Unterstützung – für diese Vorüberlegungen etwa 50 Minuten gebraucht. Aber der Aufwand lohnt sich!

Meinen alten Leitspruch bei Konstruktionen („Hilfslinien, Hilfslinien, Hilfslinien!“) musste ich allerdings mehrfach in Erinnerung rufen.

Madincea schlägt in diesem Zusammenhang vor: „Weil es mit der Übersichtlichkeit einer Konstruktion jedoch oft hapert, umgekehrt natürlich das Bedürfnis einer ästhetisch ansprechenden Figur bei den Kindern groß ist, habe ich die Gesamtaufgabe modularisiert und lasse ein Teilergebnis kopieren, damit das Endergebnis schön aussieht.“

Die Konstruktion selbst wurde dann von allen mit Hilfe eines DGS⁴ durchgeführt. Einschließlich der Makros, die die Schüler für die Konstruktion benutzen wollten (z. B. ein Makro für die Konstruktion des Inkreises eines Dreiecks), lag die Konstruktion in etwa 45 Minuten vor.

Als Höhepunkt wurde anschließend die gesamte Konstruktion ihrerseits als Makro gesichert. Die Freude, diese „riesige Konstruktion“ per Makro einsetzen und demonstrieren zu können, war allen ins Gesicht geschrieben.

Zwei Schüler wollten dann auch noch solche Fälle diskutieren, in denen per Zugmodus eine oder mehrere Eigenschaften der Malfatti-Kreise verloren gehen. Hierzu haben wir diskutiert, dass die Punkte X, Y, Z zweimal auftreten. In Abhängigkeit vom gegebenen Dreieck $\triangle ABC$ liegen sie wechselweise auf einer von zwei möglichen Dreiecksseiten – diese dann als Geraden betrachtet.

Fazit und Schlussfolgerungen

Anstelle der Konstruktion – ob mit oder ohne vorherige Berechnungen – können auch ausgewählte Elemente dieser Konstruktionen behandelt werden. Aber auch geeignete Vorbetrachtungen zum Thema können hilfreich sein – so man eine Konstruktion der Malfatti-Kreise anstrebt.

- Das ursprüngliche Malfatti-Problem kann für ein gleichseitiges Dreieck diskutiert werden.
- a) Malfatti-Kreise konstruieren und die jeweiligen Flächeninhalte berechnen; die Konstruktion der Malfatti-Kreise setzt – selbst für diesen Spezialfall – anwendungsbereites Wissen voraus,
- b) Inkreis und zwei weitere Kreise konstruieren und die jeweiligen Flächeninhalte berechnen.

Am Ende werden die Ergebnisse von Lob und Richmond bestätigt.

- Das ursprüngliche Malfatti-Problem kann für ein beliebiges Dreieck diskutiert werden, indem die Lösung von Zalgaller und Los' vorgegeben wird. Da in jedem Fall der Inkreis des gegebenen Dreiecks benötigt wird, lassen sich die beiden anderen Kreise relativ einfach konstruieren.

Die Eigenschaft, maximalen Flächeninhalt zu haben, wird an Kreisen für die von Zalgaller und Los' gegebene Fallunterscheidung

$$\sin \frac{\alpha}{2} \geq \tan \frac{\beta}{4} \quad \text{und} \quad \sin \frac{\alpha}{2} < \tan \frac{\beta}{4}$$

⁴ The Geometer's Sketchpad

überprüft. Im Endergebnis wird bestätigt, dass diese Fallunterscheidung die beiden verschiedenen Platzierungen für den dritten Kreis k_3 rechtfertigt.

Wenn die Lösung, d. h. welcher Art die drei Kreise sind, vorgegeben wird, bleibt immer noch genügend zu tun; insbesondere werden manche Schüler stocken, wenn sie die Kreise k_2 und k_3 konstruieren sollen. Hier hilft der Hinweis, dass diese beiden Kreise ihrerseits Inkreise gleichschenkliger Dreiecke sind.

- Für das (zweite) Malfatti-Problem, also die Konstruktion der Malfatti-Kreise in einem beliebigen Dreieck, sollten Vorbetrachtungen angestellt oder vorbereitende Aufgaben gestellt werden.

Die Art und Weise dieser Einstimmung auf das eigentliche Problem hängt stark davon ab, welche geometrischen Vorkenntnisse vorhanden sind, welche Kompetenzen in Bezug auf das Konstruieren vorliegen.

Darüber hinaus bietet es sich an, das Thema zu variieren.

Für das (zweite) Malfatti-Problem kann z. B. die Forderung aufgehoben werden, dass die drei Malfatti-Kreise im Innern des Dreiecks liegen müssen (Peter Yff, 1997).

In jedem Fall zeigt sich wieder einmal, wie ertragreich solche geometrischen Fragestellungen – wie das Malfatti-Problem – sein können.

Das betrifft sowohl die fachlichen Komponenten als auch die didaktischen – mit diesem Thema werden Schüler *und* Lehrer (heraus-)gefordert.

Aber derartige anspruchsvolle Themen, die motivieren und zudem ein „Durchhalten“, einen „langen Atem“ erfordern, sind rar!

Die Reihe der Tätigkeiten, die sich zum Teil zwanglos ergeben, ist beeindruckend:

Entdecken, Vermuten, Experimentieren, Präzisieren, Verallgemeinern, Spezifizieren, Begründen, Widerlegen, Zeichnen, Konstruieren, Rechnen (Termumformen), Verbalisieren – das wollen wir doch erreichen.

Darüber hinaus genießen wir die Ästhetik der konstruierten Malfatti-Kreise!

Dass Schüler diese Konstruktion letztlich nicht vollständig begründen können, das ist ein Preis, den ich zu zahlen bereit bin!

Literatur

- [1] Malfatti, Gianfrancesco: Memoria sopra un problema stereotomico. *Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana delle Scienze*, No.10,1(1803), 235-244.
- [2] Steiner, Jakob: Einige geometrische Sätze. *J. reine angew. Math.* 1(1826), 38-52; Einige geometrische Betrachtungen. *J. reine angew. Math.* 1(1826), 161-184; Fortsetzung der geometrischen Betrachtungen, *ibid.* 252-288; (auch *Gesammelte Werke*. Band I. Berlin, Reimer, 1881, 17-76)
- [3] Guy, Richard K.: The Lighthouse Theorem, Morley & Malfatti – A budget of paradoxes. *Amer. Math. Monthly* 114(2007)2, 97-141
- [4] Lob, H. and H. W. Richmond: On the solutions of Malfatti's problem for a triangle. *Proc. London Math. Soc.* 2, No. 30, 1930, 287-301.
- [5] Eves, Howard: *A Survey of Geometry*, rev. ed. Boston, MA: Allyn & Bacon, 1965, p. 245.
- [6] Goldberg, Michael: On the Original Malfatti Problem. *Math. Mag.* Nr. 40, 1967, 241-247.
- [7] Залгаллер, В. А.; Лось, Г. А.: Решение проблема Мальфатти. *Украинский геометрический сборник* 35, 1992, 14–33 [Zalgaller, V.A.; Los', G.A.: The solution of Malfatti's problem. *Journal of Mathematical Sciences.* 72 (1994)4, 3163–3177.
- [8] Loeber, Kurt: Beiträge zur Lösung und Geschichte des Malfattischen Problems und seiner Erweiterungen. Halle, Dissertation, 1914.
- [9] Schröter, H.: Die Steinersche Auflösung der Malfattischen Aufgabe. *Crelles Journal* 77 (1874), 230-244.
- [10] Petersen, Julius: *Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Konstruktionsaufgaben*. Kopenhagen, 1879.
- [11] Hoffmann, Gustav: *Anleitung zur Lösung planimetrischer Aufgaben mit Übungsbeispielen für Schüler höherer Lehranstalten insbesondere der Gymnasien, Realgymnasien und Realschulen*. Leipzig, Reisland, 1910.
- [12] Mönnig, Paul: Die Berühraufgabe von Malfatti. In: Wolff, G. (Hrsg.): *Handbuch der Schulmathematik* 5. Hannover, Schroedel, 1962, S. 43-47.
- [13] Grosche, G.: (nach einer Idee von S. Tunn) in *alpha* 23(1989)3, 52-54.
- [14] Беленький, В.; Заславский, А.: О задаче Мальфатти. *Квант* 4 (1994), 38–42 [Belen'ky, V.; Zaslavsky, A.: On the Malfatti problem.]
- [15] *Monoid* 22(2002)69,28 (Spezialfall des gleichseitigen Dreiecks);
- Fuchs, Hartwig: Vier berühmte Konstruktionsaufgaben – eine Seite geometrischer Knocheleien. *Monoid* 23(2003)74, 7.