

Martin Erik HORN, Berlin

Eine Einführung in Pauli-Matrizen und Dirac-Matrizen: Reflexionen und Rotationen in Raum und Raumzeit

In den über 130 Jahren, die seit dem Tode Hermann Graßmanns vergangen sind, hat die didaktische Aufarbeitung seiner Ideen – wenngleich auch von vielen unbemerkt – deutliche und tiefgreifende Fortschritte gemacht. So liegen zwischen den Bemerkungen Sturms, Schröders und Söhncke in ihrem Nachruf auf Graßmann, dass die Behandlungsweise Graßmanns „keinem Vorgerücktem vorenthalten und keinem Lehrer der Mathematik fremd bleiben sollte“ (Sturm et al. 1878, S. 32) und der Bemerkung Parra Serras (2009, S. 820), dass die Clifford-Algebra mittlerweile „der erstbesten Person, die man auf der Straße treffe, erklärt werden könne“, Welten.

Nicht mehr nur mathematische Spezialisten, sondern bereits im schulischen Kontext Lernende können die Ideen Graßmanns und Cliffords kognitiv erfolgreich durchdringen und problemorientiert im Unterricht erarbeiten, wie Unterrichtsbeispiele im Schulbereich (siehe z. B. Hitzer 2008; Horn 2009) belegen. Doch was in der Sekundarstufe II gelingt, sollte auch im Bereich der Hochschullehre sowohl auf fachliche wie auch auf didaktische Vorteile hin untersucht und in der Lehre erprobt werden.

1. Mathematischer Kern der Geometrischen Algebra

Im Zentrum der Geometrischen Algebra steht die Idee Graßmanns, weiter ausformuliert durch Peirce und Clifford, direkt mit geometrischen Objekten zu rechnen. Dies ist eine zutiefst physikalische Idee. Während Mathematiker im Raum aller möglichen Algebren agieren und Physikern die Entscheidung überlassen, welche der unendlich vielen hypothetisch möglichen Algebren konkret zur Modellierung von physikalischen Sachverhalten herangezogen werden, stellt Graßmann von Anbeginn einen eindeutigen Weltbezug her. Er konstruiert eine Algebra, die geometrische Gegebenheiten, wie wir sie real in unserer Lebenswelt vorfinden, umfassend abbildet.

Diese Geometrische Algebra Graßmanns wurde im Laufe der vergangenen 130 Jahre immer wieder unabhängig neu entdeckt, so auch von Pauli und

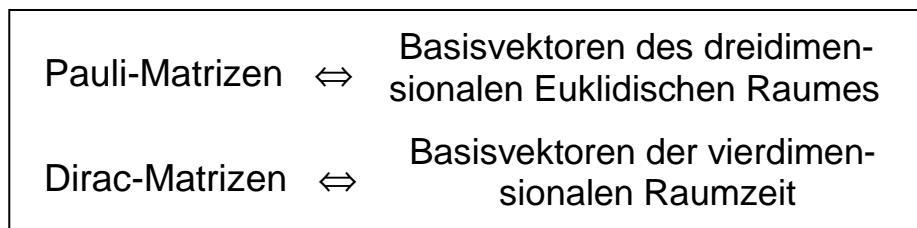


Abb. 1: Basiselemente der Geometrischen Algebra nach Gull et al (1993)

Dirac bei der Ausformulierung des quantenmechanischen Verhaltens von Elektronen (siehe Abb. 1). Die Äquivalenz von Pauli- bzw. Dirac-Matrizen und Basisvektoren der drei- bzw. vierdimensionalen Welt, in der wir leben, wurde im Weiteren von Hestenes (2003a, b) didaktisch aufgearbeitet.

2. Koordinatenperspektive und Operatorenperspektive

Die konzeptionelle Stärke der Geometrischen Algebra liegt dabei nicht nur in ihrer verbindlichen Anknüpfung an die geometrische Struktur unserer Welt begründet, sondern in der Einheitlichkeit ihrer Beschreibungsweise. Diese umfassende, strukturell eingeprägte Einheitlichkeit drückt sich unter anderem dadurch aus, dass Koordinaten und Operatoren durch identische Basiselemente dargestellt werden.

Diese Basiselemente werden von Penrose (2005, S. 209), sich auf Hestenes beziehend, als Basis-Reflexionen erkannt (siehe Abb. 2), wenn sie links- und rechtsseitig multiplikativ mit einem Ortsvektor verknüpft werden.

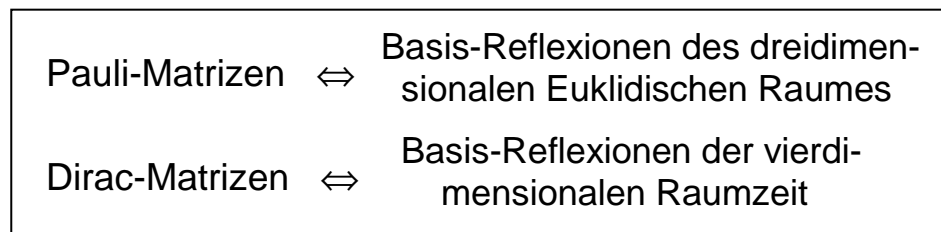


Abb. 2: Basisoperationen der Geometrischen Algebra

Ein beliebiger Ortsvektor des dreidimensionalen Euklidischen Raumes

$$\underline{r} = x \sigma_x + y \sigma_y + z \sigma_z \quad (1)$$

wird beispielsweise durch beidseitige Multiplikation mit σ_x in den an der x-Achse gespiegelten Ortsvektor

$$\underline{r}' = \sigma_x \underline{r} \sigma_x = x \sigma_x - y \sigma_y - z \sigma_z \quad (2)$$

überführt, wobei Assoziativität und Anti-Kommutativität der Basisvektoren σ_i genutzt werden.

3. Rotationen als mehrfache Reflexionen

Führt man zwei beliebige Reflexionen hintereinander aus, ergibt sich eine Rotation. Im dreidimensionalen Fall repräsentieren die Produkte zweier Pauli-Matrizen deshalb die quaternionischen Basiseinheiten i, j und k (Doran & Lasenby 2003, S. 34). Im Fall der Raumzeit stellen die vierdimensionalen Rotationen sodann Lorentztransformationen dar.

Ein beliebiger Ortsvektor der vierdimensionalen Raumzeit

$$\underline{r} = ct \boldsymbol{\gamma}_t + x \boldsymbol{\gamma}_x + y \boldsymbol{\gamma}_y + z \boldsymbol{\gamma}_z \quad (3)$$

wird durch beidseitige Multiplikation mit zwei Einheitsvektoren

$$\underline{n} = n_t \boldsymbol{\gamma}_t + n_x \boldsymbol{\gamma}_x + n_y \boldsymbol{\gamma}_y + n_z \boldsymbol{\gamma}_z \quad \text{und} \quad \underline{m} = m_t \boldsymbol{\gamma}_t + m_x \boldsymbol{\gamma}_x + m_y \boldsymbol{\gamma}_y + m_z \boldsymbol{\gamma}_z \quad (4)$$

in den hyperbolisch rotierten Ortsvektor

$$\underline{r}' = \underline{m} \underline{n} \underline{r} \underline{n} \underline{m} = ct' \boldsymbol{\gamma}_t + x' \boldsymbol{\gamma}_x + y' \boldsymbol{\gamma}_y + z' \boldsymbol{\gamma}_z \quad (5)$$

überführt, wobei gestrichene und ungestrichene Koordinaten das übliche Verhalten bei Lorentztransformationen zeigen. Die Lorentztransformation wird hier einzig durch Multiplikationen modelliert. Bei der Berechnung des Produktes ist das antikommutative Verhalten der Basiselemente und zum zweiten die der Speziellen Relativitätstheorie zugrunde liegende Metrik mit $\boldsymbol{\gamma}_t^2 = 1$ und $\boldsymbol{\gamma}_x^2 = \boldsymbol{\gamma}_y^2 = \boldsymbol{\gamma}_z^2 = -1$ zu berücksichtigen.

4. Didaktische Aspekte

Einer der entscheidenden Aspekte des hier vorgestellten Ansatzes ist die strukturelle Verknüpfung von Algebra und Geometrie. Jeder algebraische Ausdruck lässt sich in der Geometrischen Algebra geometrisch darstellen, und jede geometrische Situation lässt sich durch einen algebraischen Ausdruck beschreiben. Die Erfahrung im Unterricht zeigt, dass die Betonung und Nutzung dieser Verknüpfung direkt mit Einführung der Geometrischen Algebra einer der wesentlichen didaktischen Strategien darstellt.

Pauli-Matrizen werden deshalb nicht als Matrizen, sondern als Pauli-Vektoren bezeichnet und im Tafelbild durch Vektorpfeile repräsentiert. Produkte zweier verschiedener Pauli-Matrizen werden als Pauli-Bivektoren bezeichnet und im Tafelbild durch orientierte Flächenstücke repräsentiert. Im Rahmen dieses Ansatzes können wir mit Pauli-Matrizen arbeiten, ohne das Wort „Matrix“ auch nur zu erwähnen. Nicht die Repräsentation als 2×2 -Matrix ist entscheidend, sondern deren geometrische Bedeutung.

Lernende werden im Bereich der Mathematik von Beginn ihrer Lernbiographie an nahezu ausschließlich mit kommutativen Beziehungen konfrontiert. Die Anti-Kommutativität der Pauli-Vektoren ist deshalb einer der Punkte, die für Lernende neu und ungewohnt erscheinen und einen Konzeptwechsel erforderlich machen. Auch dieser Sachverhalt kann unter Rückgriff auf geometrische Konzepte (wie zum Beispiel dem Orientierungssinn unterschiedlicher Flächenstücke) didaktisch geklärt werden.

5. Erfahrungen bei der Umsetzung im seminaristischen Unterricht

Nachdem die Modellierung der Speziellen Relativitätstheorie im Rahmen des hier vorgestellten Ansatzes mit gutem Erfolg in einem Berliner Physik-

Leistungskurs unterrichtet und im Abitur abgeprüft wurde (Horn 2009), wurde ein ähnliches Konzept im Rahmen einer Vorlesung zur Physik für Mathematiker an der Beuth-Hochschule für Technik Berlin erprobt. Die verwendeten Materialien werden in Kürze in (Horn 2010) veröffentlicht.

Es gelang, die Studierenden am Beispiel der Speziellen Relativitätstheorie in die Denk- und Arbeitsweisen naturwissenschaftlicher Erkenntnisgewinnung einzuführen und ein übergreifendes Verständnis der modellhaften Verknüpfungen zwischen Geometrischer Algebra und relativistischen Phänomenen zu entwickeln. Im Unterschied zum schulischen Vorgehen, bei dem der Schwerpunkt auf den Koordinatenaspekt gelegt wurde, wurde hier versucht, die Verknüpfung zwischen Operatoren- und Koordinatenperspektive in den Vordergrund zu stellen. Dies gelang nicht ganz so vollständig wie geplant, da einerseits die zeitlichen Vorgaben (6 Vorlesungsstunden im Vergleich zu 25 Schulstunden) enge Grenzen setzten.

Darüber hinaus zeigt sich, dass die konzeptuelle Vorprägung der Studierenden auf ihnen schon bekannte Konzepte weit stärker ist als bei Schülern. Eine der Schlussfolgerungen ist deshalb, die Geometrische Algebra möglichst frühzeitig zu behandeln, und den Vorschlag Parra Serras (2009), dafür die curricularen Voraussetzungen zu schaffen, zu unterstützen.

Literatur

- Doran, C., Lasenby, A. (2003). *Geometric Algebra for Physicists*. Cambridge: CUP.
- Gull, S., Lasenby, A. & Doran, C. (1993). *Imaginary Numbers are not Real – The Geometric Algebra of Spacetime*. Foundations of Physics, Vol. 23, No. 9, S. 1175 - 1196.
- Hestenes, D. (2003a). *Reforming the Mathematical Language of Physics*. Oersted Medal Lecture. American Journal of Physics. Vol. 71, No. 2, S. 104 – 121.
- Hestenes, D. (2003b). *Spacetime Physics with Geometric Algebra*. American Journal of Physics. Vol. 71, No. 7, S. 691 - 714.
- Hitzer, E. (2008). Vectors and Complex Numbers. Script for four 45 min classes held at Fujishima Super Science High School in Fukui, Japan, 11. Jan. - 1. Feb. 2008.
- Horn, M. E. (2009). *Vom Raum zur Raumzeit*. In D. Höttecke (Hrsg.): Chemie- und Physikdidaktik für die Lehramtsausbildung. GDGP-Band 29. Berlin: LIT-Verlag Dr. W. Hopf, S. 455 - 457.
- Horn, M. E. (2010). *Die Spezielle Relativitätstheorie in der Mathematikerbildung*. Zur Veröffentlichung vorgesehen in V. Nordmeier (Hrsg.): Didaktik der Physik. Beiträge zur Frühjahrstagung der DPG in Hannover, Beitrag 19.35.
- Parra Serra, J. M. (2009). Clifford Algebra and the Didactics of Mathematics. Advances in Applied Clifford Algebras. Vol. 19, No. 19, S. 819 - 834.
- Penrose, R. (2005). *The Road to Reality*. London: Vintage Books.
- Sturm, R., Schröder, E. & Sohncke, L. (1878). *Hermann Grassmann – Sein Leben und seine mathematisch-physikalischen Arbeiten*. Mathematische Analen, Band 14, Heft 1, S. 1 - 45.