

Nina BERLINGER, Münster

## **Untersuchungen zum räumlichen Vorstellungsvermögen mathematisch begabter Dritt- und Viertklässler**

In umfangreichen Untersuchungen konnte Käpnick spezifische Merkmale mathematisch begabter<sup>1</sup> Dritt- und Viertklässlern herausstellen (vgl. Käpnick 1998). Während in seinem Modell Strukturierungsfähigkeiten oder mathematische Sensibilität z.B. relativ unbestritten als mathematikspezifische Begabungsmerkmale gelten, ist ungeklärt, inwiefern das räumliche Vorstellungsvermögen die mathematische Begabung mitbestimmt. Für Bardy (2007, S. 31) stellt diese Fähigkeit z.B. eine der geistigen Grundlagen mathematischen Denkens dar, andere sehen darin jedoch zwar eine günstige aber nicht unbedingt notwendige Komponente (vgl. Krutetzki 1968). Im Rahmen meiner Dissertation soll deshalb untersucht werden, welche Bedeutung das räumliche Vorstellungsvermögen für die Kennzeichnung einer mathematischen Begabung bei Dritt-/Viertklässlern hat.

### **1. Theoretischer Hintergrund**

Käpnick (1998) berücksichtigte das räumliche Vorstellungsvermögen bei einer theoretischen Konstruktion eines Merkmalssystems für mathematisch begabte Dritt- und Viertklässler zunächst. Er begründet dies damit, dass das räumliche Vorstellungsvermögen gerade für mathematische Erkenntnisprozesse von Grundschulern generell sehr wichtig ist. Sie können „*derartige Zusammenhänge häufig erst mittels gegenständlich-praktischer Handlungen oder Veranschaulichungen erfassen*“ und müssen „*dann beim notwendigen Wechseln der Repräsentationsebenen bildliche Darstellungen speichern und mit diesen Vorstellungsbildern gedanklich operieren*“ (Käpnick 1998, S. 115). In seinen empirischen Untersuchungen bestätigte sich diese Annahme allerdings nicht, da die mathematisch begabten Kinder die Indikatoraufgaben zur Raumvorstellung nur leicht besser lösten als die mathematisch durchschnittlich begabten Kinder. Einerseits könnte dies darauf hindeuten, dass die Aufgaben aufgrund des Schwierigkeitsgrads nicht geeignet sind, um signifikante Unterschiede zu ermitteln. Andererseits zeigte sich aber auch, dass sich die mathematisch begabten Kinder bzgl. der Ausprägung des räumlichen Vorstellungsvermögens stark voneinander unter-

---

<sup>1</sup> Unter einer mathematischen Begabung im Grundschulalter verstehe ich mit Käpnick & Fuchs ein „*sich dynamisch entwickelndes Potential von individuell geprägten, weit überdurchschnittlichen mathematikspezifischen Begabungsmerkmalen und sich hiermit in wechselseitigen Zusammenhängen entwickelndes begabungsstützenden bereichsspezifischen Persönlichkeitseigenschaften*“ (Fuchs 2006, S. 68).

schieden. Dies könnte im Sinne Krutetzki interpretiert werden, der das räumliche Vorstellungsvermögen zwar als eine „*günstige jedoch nicht unbedingt erforderliche Komponente*“ für eine mathematische Begabung sieht (Krutetzki 1968). Aufgrund der Untersuchungsergebnisse wurde das räumliche Vorstellungsvermögen nicht in das Modell mathematischer Begabungsentwicklung nach Käpnick & Fuchs aufgenommen (vgl. Fuchs 2006).

In der Literatur existiert keine einheitliche Definition des räumlichen Vorstellungsvermögens, auch wenn das allgemeine Verständnis darüber, was mit räumlichem Vorstellungsvermögen gemeint ist, relativ einheitlich ist: „*Raumvorstellung kann umschrieben werden als die Fähigkeit, in der Vorstellung räumlich zu sehen und räumlich zu denken. Sie geht über die räumliche Wahrnehmung durch die Sinne hinaus, indem sie nicht nur ein Registrieren der Sinneseindrücke, sondern ihre gedankliche Verarbeitung voraussetzt*“ (Wölpert 1983, S. 9). Da zahlreiche Studien einen intra- und interindividuell variablen Strategieeinsatz<sup>2</sup> zeigen konnten, scheint die folgende Ergänzung von Souvignier überzeugend zu sein: „*wobei Strategien zur Reduzierung der Komplexität der Vorstellungen entwickelt und umgesetzt werden*“ (Souvignier 2000, S. 27). Während eine Definition des räumlichen Vorstellungsvermögens eher mit Bezug auf die Beschreibung kognitiver Prozesse sinnvoll ist, lassen sich konkrete Hinweise zur Operationalisierung in erster Linie aus der psychometrischen Perspektive ableiten. In der Mathematikdidaktik wurde vielfach auf psychometrische Modelle aus der Psychologie zurückgegriffen, die zusammengefasst, leicht verändert und so für mathematikdidaktische Belange modifiziert wurden. Diesbzgl. ist die Modellierung von Maier (1999) stark verbreitet und anerkannt, die fünf Teilkomponenten berücksichtigt: Räumliche Wahrnehmung, Veranschaulichung, Vorstellungsfähigkeit von Rotationen, Räumliche Beziehungen, Räumliche Orientierung. Er betont, dass zwischen diesen Faktoren wechselseitige Beziehungen und Abhängigkeiten vorherrschen (vgl. Maier 1999, S. 50-52). Da in Bezug auf meine Untersuchungen nicht eine strikte faktorenanalytische Trennung von Teilkomponenten, sondern eine möglichst breite Definition des räumlichen Vorstellungsvermögens von Interesse ist, orientiere ich mich bei der Operationalisierung an Maier.

## **2. Forschungsmethodische Anlage**

Im Anschluss an eine Literaturanalyse zu den Komplexen „*mathematische Begabung*“ und „*räumliches Vorstellungsvermögen*“ werden sowohl quantitative als auch qualitative Untersuchungen durchgeführt.

---

<sup>2</sup> Auch Beobachtungen im Projekt „*Mathe für kleine Asse*“ haben individuell unterschiedliche Strategien gezeigt (siehe dazu Berlinger 2010 und 2011).

Für die quantitativen Untersuchungen mussten zunächst Raumvorstellungsindikatoraufgaben<sup>3</sup> entwickelt, erprobt und anschließend leicht überarbeitet werden. In der Hauptuntersuchung im Mai/Juni 2010 wurden diese dann in den Dritt- und Viertklässlergruppen des Projekts „Mathe für kleine Asse“ (62 mathematisch begabte Kinder) sowie in heterogen zusammengesetzten dritten und vierten Klassen (111 Kinder) eingesetzt. Eine der Aufgaben zur Teilkomponente Veranschaulichung lautete: *ein Bogen Papier wird zuerst mehrfach gefaltet und anschließend werden Ecken abgeschnitten. Wie sieht das Blatt Papier nach dem Auffalten aus?* (vgl. Abb. 1)

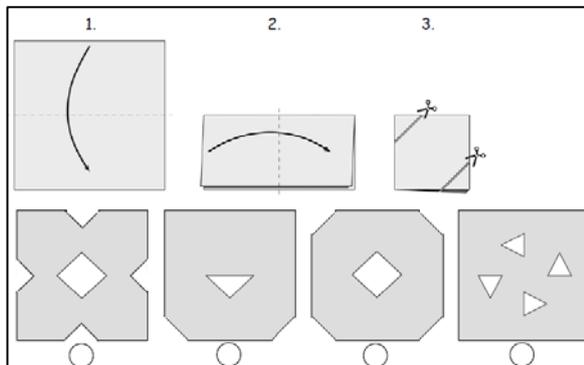


Abb. 1: Faltaufgabe (Veranschaulichung)

Die Durchführung und die Auswertung der Indikatoraufgaben wurden jeweils von mir selber durchgeführt. Anschließend wurde überprüft, ob sich die Ergebnisse der mathematisch begabten Kinder signifikant von den Ergebnissen der Vergleichsgruppe unterscheiden, um klären zu können, ob es sich beim räumlichen Vorstellungsvermögen um ein mathematikspezifisches Begabungsmerkmal handelt<sup>4</sup>.

### 3. Erste Ergebnisse

Die nachfolgende Tabelle enthält einen Überblick über einen aufgabenbezogenen Vergleich bei fünf verschiedenen Indikatoraufgaben.

| Aufgabe   | Teilkomponente des räumlichen Vorstellungsvermögen | Sig.  |
|-----------|--|-------|
| Aufgabe 1 | Räumliche Wahrnehmung                              | 0,256 |
| Aufgabe 2 | Veranschaulichung                                  | 0,000 |
| Aufgabe 3 | Räumliche Beziehungen                              | 0,000 |
| Aufgabe 4 | Vorstellungsfähigkeit von Rotationen               | 0,001 |
| Aufgabe 5 | Räumliche Orientierung                             | 0,010 |

Tab. 1: Aufgabenbezogener Vergleich zwischen den Ergebnissen der mathematisch begabten Kinder und der Vergleichsgruppe

<sup>3</sup> Zu jeder Teilkomponente des räumlichen Vorstellungsvermögens nach Maier (1999) wurden zwei Aufgaben entwickelt.

<sup>4</sup> Zunächst wurde die Homogenität der Daten bzgl. Geschlecht und Klassenstufe sichergestellt. Die statistische Auswertung erfolgte dann mit dem Mann-Whitney-U-Test für zwei unabhängige Zufallsstichproben.

Es zeigt sich ein hoch signifikanter Unterschied hinsichtlich der Ergebnisse bei den Aufgaben 2 bis 5 (Veranschaulichung, räumliche Beziehungen, Vorstellungsfähigkeit von Rotationen, räumliche Orientierung) zwischen beiden Gruppen zugunsten der mathematisch begabten Kinder. Lediglich bzgl. der Ergebnisse der Aufgabe 1 (räumliche Wahrnehmung) sind keine signifikanten Unterschiede festzustellen. Dies ist vermutlich dadurch zu erklären, dass diese Teilkomponente des räumlichen Vorstellungsvermögens vielfach auch als Voraussetzung gesehen wird, um in den anderen Bereichen gute Fähigkeiten zu entwickeln. Viele Kinder haben die Aufgabe daher sehr gut lösen können.

Insgesamt zeigte sich, dass zwar viele mathematisch begabte Kinder über ein gutes räumliches Vorstellungsvermögen verfügen, dass aber einige von ihnen auch Schwächen in diesem Bereich haben. Diese Ergebnisse werfen die Frage auf, ob es sich beim räumlichen Vorstellungsvermögen evtl. eher um ein typpendifferenzierendes mathematikspezifisches Begabungsmerkmal handelt. Zudem bleibt offen, ob es Wechselwirkungen zu anderen Begabungsmerkmalen (z.B. Wechseln der Repräsentationsebene) und zu Vorgehensweisen bei Aufgaben aus anderen mathematischen Bereichen gibt. Auch die Erfassung von Strategien von mathematisch begabten Dritt- und Viertklässlern beim Lösen von Raumvorstellungsaufgaben lässt interessante Ergebnisse erwarten. Diesen Fragen soll in qualitativen Untersuchungen in Form von komplexen Einzelfallstudien nachgegangen werden.

## **Literatur**

- Bardy, P. (2007): Mathematisch begabte Grundschul Kinder - Diagnostik und Förderung. München: Spektrum.
- Berlinger, N. (2010): Räumliches Vorstellungsvermögen - wichtig oder wesentlich für die mathematische Begabungsentwicklung im Grundschulalter? In F. Käpnick (Hrsg.): Das Münsteraner Projekt „Mathe für kleine Asse“. Münster: WTM, 138-149.
- Berlinger, N. (2011): Wenn sich das Gehirn verknotet - Zum räumlichen Vorstellungsvermögen mathematisch begabter Grundschul Kinder. In: Grundschule, 1, 36-38.
- Fuchs, M. (2006): Vorgehensweisen mathematisch potentiell begabter Dritt- und Viertklässler beim Problemlösen. Berlin: Lit.
- Käpnick, F. (1998): Mathematisch begabte Kinder. Frankfurt am Main: Peter Lang.
- Krutetzki, V. A. (1968): Altersbesonderheiten der Entwicklung mathematischer Fähigkeiten bei Schülern. In: Mathematik in der Schule, 6, 44-58.
- Maier, P. H. (1999): Räumliches Vorstellungsvermögen – Ein theoretischer Abriss des Phänomens räumliches Vorstellungsvermögen. Donauwörth: Auer.
- Souvignier, E. (2000): Förderung räumlicher Fähigkeiten. Münster: Waxmann.
- Wölpert, H. (1983): Materialien zur Entwicklung der Raumvorstellung im Mathematikunterricht. In: Der Mathematikunterricht (MU), 29 (6), 7-42.