

Deborah DÖTSCHER, Nürnberg

Zum Verständnis der Unendlichkeitsbegriffs im Mathematikunterricht

Hermann Weyl bezeichnet „Mathematik [als] die Wissenschaft der Unendlichkeit.“ Unendlichkeit hat nach David Hilbert zudem außerhalb der Mathematik „wie keine andere Frage von jeher so tief das Gemüt der Menschen“ beschäftigt. In der Religion wird das Unendliche als elementarer Grundstein für das Gottesbild gesehen; Künstler wie Escher verarbeiten „Unendlich“ in ihren Werken und bereits Aristoteles beschäftigte sich mit Fragen nach dem „aktuell“ und „potentiell Unendlichen“.

Dass Unendlichkeit auch für Schüler ein interessantes Themengebiet ist, scheint eine logische Konsequenz, welche vom Unterricht allerdings weitgehend unbeachtet bleibt: : „*Immer dann, wenn Mathematik einmal interessant wurde, hörte der Unterricht auf, genauer hinzusehen. Das fand ich ziemlich ärgerlich.*“ (Zitat eines angehenden Referendars)

Ausgehend von der Kluft zwischen mathematischem und allgemeinen Interesse einerseits und schulischer „Nichtbehandlung“ andererseits stellen sich Fragen wie: Wo und wie wird im heutigen Unterricht der Unendlichkeitsbegriff thematisiert? Welches Verständnis haben Schüler unterschiedlicher Schulformen vom Unendlichkeitsbegriff? Wie stellt sich eine angemessene Stoffauswahl zum Unendlichkeitsbegriff für die Schule dar?

Der Unendlichkeitsbegriff im Unterricht

Betrachtet man Mathematikbücher unterschiedlicher Jahrgangsstufen, so trifft man bereits vor und in der Primarstufe auf das Phänomen „Unendlich“. Mit Aussagen wie „1,2,3 und immer weiter zählen“ oder „unendlich viele Symmetrieachsen des Kreises“ setzen sich Kinder mit dem Begriff auseinander. In der Sekundarstufe I begegnen Schüler dann beispielsweise Vorstellungen zur „unendlichen“ Ausbreitung von Geraden und Ebenen im Raum oder unendlich vielen Nachkommastellen irrationaler Zahlen, während in der Analysis der Sekundarstufe II sogar ganze Lehrgänge dem „Unendlichen“ gewidmet sind. Die entscheidenden Fragen zu diesem Thema bleiben jedoch unbeantwortet: Was *ist* Unendlich? Was beschreibt aus Sicht der Mathematik der Begriff „Unendlich“?

Vorstellungen zu Unendlich

Dass der Unendlichkeitsbegriff einerseits im Unterricht an verschiedensten Stellen auftritt und in der Sekundarstufe II sogar intensiv benutzt wird, andererseits aber nicht thematisiert und zum eigenständigen Objekt von Re-

flexionen erhoben wird, wirft zunächst die Frage auf, mit welchen Vorstellungen Schüler „Unendlich“ assoziieren. In einer ersten Vorstudie (im Rahmen eines Dissertationsprojekts) zum Verständnis des Unendlichkeitsbegriff wurden 77 Hauptschüler aus allen Klassenstufen, 48 Gymnasiasten (Mathe-LK 13) und 26 Studenten aus dem 7. Semester für das Gymnasiale Lehramt Mathematik die Frage gestellt: „Was verstehst Du unter unendlich?“ Zumindest an den beiden „Enden des Spektrums“, also auf der einen Seite die Hauptschüler, auf der anderen Seite die angehenden Mathematiklehrer müssten und sollten sich verschieden ausgeprägte Verständnisniveaus erwarten lassen. Die befragten Hauptschüler gaben (erwartungsgemäß) „unmathematische“ Antworten, wie etwa: unendlich sei „die größte Zahl der Welt“; „Hört nie auf“ oder irgendetwas mit diesem Symbol „ ∞ “. Der Versuch einer Einordnung der Antworten in Kategorien wie „Größenvorstellung“, „Iteration“, ... ergibt:

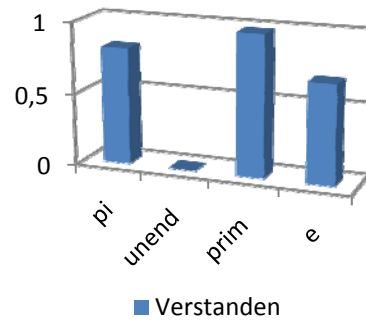
Hauptschüler		Mathematikstudenten
„Hört nie auf.“	Iteration	„Man fängt an zu zählen und kann niemals aufhören.“ „ohne Ende“
„Das Universum ist unendlich.“	Metaphysisch	„Das Weltall und der liebe Gott“
„Eine 1 mit ewig viel Nullen“	Zifferaspekt	„Man hängt 1 Jahr lang immer wieder 0er an die eins und dann noch weiter...“
„Das Symbol ∞ “	Formalsymbolisch	„ $\infty + 1$ “
„Die größte Zahl der Welt“	Größenvorstellung	„..unvorstellbar groß“

Ordnet man nun die Antworten der Mathematikstudenten (7.Sem.) in diese Kategorien ein, so zeigt sich erstaunlicherweise, dass sie sich nicht merklich unterscheiden. Auch die „Mathematiker“ gaben *ausschließlich* „unmathematische“, eher intuitive, umgangssprachliche Antworten wie etwa: „Unendlichkeit ist unendlich groß, unvorstellbar groß“ oder „Das Weltall und der liebe Gott“; „Man hängt 1 Jahr lang immer wieder 0er an die eins und dann noch weiter...“. Keine einzige Formulierung zielt auf eine mathematische Definition, wie sie beispielsweise von Cantor gegeben ist.

Um bei der Auswertung Missverständnisse auszuschließen bzw. zu überprüfen, ob etwa generell von den Befragten mathematischen Antworten gemieden werden, wurde parallel zu „Unendlich“ nach dem Verständnis zu „Pi“, „Primzahl“ und „e“ gefragt.

Anders als bei „Unendlich“ fielen die Antworten hier „mathematisch“ aus: Beispiele hierfür wären, „das Verhältnis zwischen Kreisumfang und Durchmesser“ oder „eine Zahl, die durch sich selbst und 1 teilbar ist“.

Entsprechend ergibt sich bei der Auswertung nach - Begriff „mathematisch“ beantwortet / Begriff nicht „mathematisch“ beantwortet - nebenstehendes Bild. (Auf der Abszisse ist der Anteil „mathematisch“ korrekter Antworten aufgetragen).



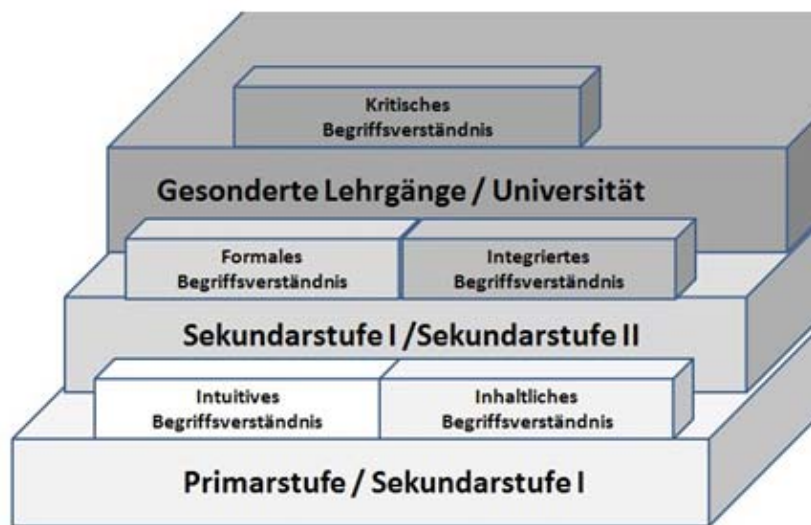
Überlegungen zu einer Lehrgangskonzeption

Angeichts der Situation, dass ein zentraler Begriff der Mathematik im Unterricht zwar verwendet, aber offensichtlich an keiner Stelle thematisiert wird und dass Abiturienten (und wie bei der vorliegenden Befragung selbst Studierende des Faches Mathematik) also nur über dasselbe intuitive Begriffsverständnis wie Hauptschüler verfügen, stellt sich die Frage, ob und wie sich der Unendlichkeitsbegriff in ein Curriculum einbetten lässt.

Beim „langfristigen“ Lernen von Begriffen liefert ein Stufenmodell (hier von Vollrath) einen Rahmen, der beim Unendlichkeitsbegriff aufgrund chronologischer, geschichtlicher Entwicklungen und didaktischen Überlegungen gefüllt werden und so als Basis für ein Lehrgangskonzept dienen kann.

Im vorliegenden Fall zeigt eine Begriffsanalyse, dass das ursprüngliche Stufenmodell für eine Einordnung des Unendlichkeitsbegriffs aus Gründen mathematischer Überlegungen

modifiziert werden sollte und in etwa obige Gestalt annehmen könnte.



Wendet man diese Stufung auf die zentralen mathematischen Aspekte zum Begriff „Unendlich“ an, ergibt sich folgende grobe Gliederung, die als Grundlage für eine nachhaltige Vermittlung des Begriffs in der Schule dienen könnte.

<p>Intuitives / Inhaltliche Begriffsverständnis</p> <ul style="list-style-type: none"> - „...“ wird als unendliches Weiterzählen verstanden - Existenz unendlich großer Zahlenbereich - Unterscheiden endlicher und unendlicher Mengen - 1 zu 1 Zuordnungen vornehmen (Bijektion) - Periodische Zahlen - Rechnen mit periodischen Zahlen - Phänomenologie/Paradoxa
<p>Formales / Integriertes Begriffsverständnis</p> <ul style="list-style-type: none"> - Mächtigkeit von \aleph_0 (abzählbare Mengen) - 1. und 2. Diagonalverfahren nach Cantor - Definition von Unendlichkeit nach Cantor - Verständnis „es existieren mind. 2 Unendlichkeiten“ - Beweis zur Überabzählbarkeit von \aleph_0 - Phänomene in \aleph_1 („Dimensionsproblem“) - Beweis zur Mächtigkeit der Potenzmenge - Verständnis „es existieren unendlich viele Unendlichkeiten“
<p>Kritisches Begriffsverständnis</p> <ul style="list-style-type: none"> - Mengenparadoxon (Auswahlaxiom) - Menge aller Mengen - Banach-Tarski-Paradoxon - Axiomatische Mengenlehre - Diskussion der Kontinuumshypothese - Intuitionismus (Brouwer) / Konstruktivismus

Offen bleiben an dieser Stelle noch Fragen nach einer für verschiedene Schularten und Schulstufen geeigneten Stoffauswahl, Einbettung und Vernetzung in das übliche Curriculum, um zu vermeiden, dass „Unendlichkeit“ als „Fremdkörper“ bzw. „totes Thema“ im Mathematikunterricht erscheint.

Literatur

- Deiser, O., (2004): Einführung in die Mengenlehre. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Meschkowski, H. (1973): Hundert Jahre Mengenlehre. Deutscher Taschenbuch Verlag GmbH & Co. KG. München.
- Vollrath, H.-J. (1995): Didaktische Probleme langfristiger Lernprozesse im Mathematikunterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. S. 54-61