

Maike SCHINDLER, Dortmund

## **Dem Anwenden mathematischer Begriffe auf der Spur – Eine Interviewstudie zum Begriff der negativen Zahl im Rahmen des Projekts KOSIMA**

Im vorliegenden Beitrag wird der Frage nachgegangen, inwiefern es Schülerinnen<sup>1</sup> gelingt, individuelle mathematische Begriffe in verschiedenen Kontexten und Situationen anzuwenden. Da für Schülerinnen der Gebrauch mathematischer Begriffe als Werkzeuge zum Ordnen ihrer Welt und von Situationen von immenser Bedeutung ist, ist das Forschungsinteresse der dargestellten Studie, mit einem geeigneten theoretischen Rahmen detaillierte Einblicke zur Frage zu ermöglichen, inwiefern Schülerinnen individuelle Begriffe anwenden können und welche Schwierigkeiten sich dabei zeigen.

Die empirische Studie wurde in siebten Klassen einer Realschule und eines Gymnasiums in NRW durchgeführt. Zu einer vorliegenden Unterrichtsreihe zur Einführung der negativen Zahlen, welche im Rahmen des Projekts KOSIMA entwickelt wurde (Hußmann 2013), lernten die Schülerinnen den Begriff der negativen Zahl zunächst im Kontext von Schulden und Guthaben kennen. Im Anschluss an die Erarbeitung der Addition und Subtraktion als Vor- und Rückschau wurden Aufgaben in weiteren Kontexten (Temperaturen, Höhen über/unter dem Meeresspiegel, etc.) bearbeitet. Im Rahmen der Studie wurden darüber hinaus halbstandardisierte Interviews zum Gebrauch des Begriffs der negativen Zahl in verschiedenen Kontexten durchgeführt, die vor, während und nach der Unterrichtsreihe stattfanden.

Im Rahmen dieser Studie werden individuelle mathematische Begriffe – in Abgrenzung zu konventionalen mathematischen Begriffen als mathematische Objekte – vor dem Hintergrund der inferentialistischen Theorie Brandons (2001) betrachtet (vgl. Hußmann & Schacht 2009, Schacht 2011). Wesentlich für den gewählten inferentialistischen Zugang ist, dass individuelle Begriffe durch die Rekonstruktion von Festlegungen als kleinste Einheiten des Denkens und Handelns erfasst werden. *Festlegungen* sind rekonstruierte Behauptungen in propositionaler Form, die von der Schülerin für wahr gehalten werden und ihren (Sprech-)Handlungen zugrunde liegen. Charakteristisch für Festlegungen ist, dass sie inferentiell gegliedert sind: Sie werden für wahr gehalten, da sie auf subjektiv empfundenen Berechtigungen beruhen und können ihrerseits wiederum als Berechtigungen für weitere Festlegungen dienen. Im Lernprozess entstehen zu Begriffen – bspw. zum Begriff der negativen Zahl – inferentiell gegliederte

---

<sup>1</sup> Das generische Femininum bezieht sich in diesem Beitrag auf beide Geschlechter.

Festlegungsstrukturen, die sich fortwährend verändern. Diese Entwicklung der Festlegungsstrukturen wird als Begriffsbildung verstanden (vgl. Schacht 2011). Für die Analyse im Rahmen dieser Studie wird darüber hinaus die Theorie der Conceptual Fields (Vergnaud 1996) genutzt, welche neben theorems-in-action als subjektiv für wahrgehaltene Propositionen *concepts-in-action* stellt. Letztere werden verstanden als handlungsleitende Kategorien, als individuelle Begriffe, die die Schülerin als Werkzeug nutzt, um die in einer Situation gegebenen mannigfaltigen Informationen adäquat auszuwählen.

Die individuelle Situation, in der sich eine Schülerin befindet, der handlungsleitende Begriff sowie die Festlegung, die rekonstruiert werden kann, bilden ein Dreieck, welches eine Analyseeinheit für Begriffsbildungsprozesse darstellt (siehe Abb. 1).

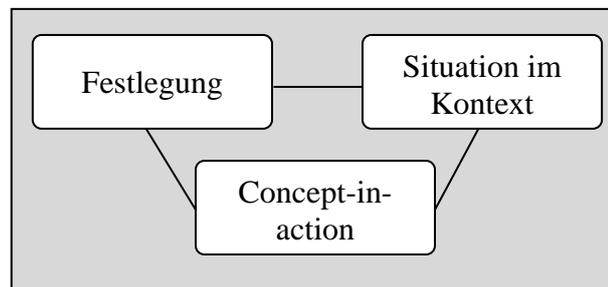


Abbildung 1 Analyseeinheit

Da der Fokus der Studie auf dem Gebrauch von Begriffen in Kontexten liegt, werden als weiterer theoretischer Hintergrund die Ebenen der Mathematisierung des Ansatzes der Realistic Mathematics Education (RME) betrachtet. *Vertikale Mathematisierung* wird dort verstanden als “all kinds of re-organizations and operations done by the students within the mathematical system itself“ (van den Heuvel-Panhuizen 2003, 12). *Horizontale Mathematisierungsprozesse* finden statt, wenn mathematische Mittel aktiviert und genutzt werden, um ein Problem in einem bestimmten Kontext zu bearbeiten (vgl. ebd.). Vor dem Hintergrund des inferentialistischen Zugangs können vertikale Mathematisierungsprozesse als Neu- und Umstrukturierungen von Festlegungen, bspw. als Ausdifferenzierung oder als Vereinigung von Festlegungen betrachtet werden. Horizontale Mathematisierungsprozesse finden dann statt, wenn Schülerinnen in einem Kontext wie Schulden, Höhenmeter oder Temperaturen Festlegungen aktivieren und als Werkzeug nutzen können, welche zuvor in Festlegungsstrukturen im Bereich des Begriffs der negativen Zahl schon angebahnt wurden.

Dem Forschungsinteresse folgend wird im Rahmen dieser Studie fokussiert, inwiefern horizontale Mathematisierungsprozesse mittels der Analyse eines kontextübergreifenden Gebrauchs von Festlegungen und *concepts-in-action* rekonstruiert werden können. Es wird analysiert, inwiefern das Aktivieren und Anwenden von Festlegungen und *concepts-in-action*, welche bereits in einer Situation in einem vorherigen Kontext genutzt wurden, in ei-

ner Situation in einem neuen Kontext – also als eine „Übertragung“ von Kontext zu Kontext – gelingt (vgl. Abb. 2).

Im folgenden Beispiel wird die Rekonstruktion des Begriffsgebrauchs einer Schülerin dargestellt, welche im Interview Aufgaben im Kontext Tordifferenzen in

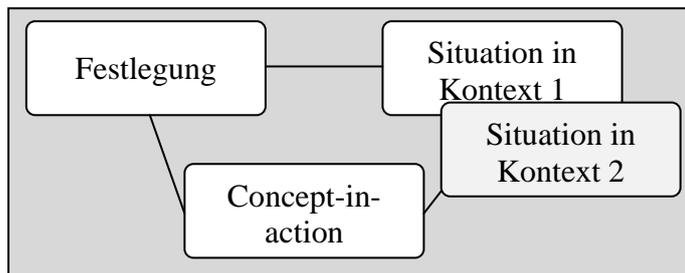


Abbildung 2 Analyseeinheit Kontextwechsel

der Fußball-Bundesliga bearbeitete. Zuvor hatte

sie in den Kontexten Schulden, Bergwerk, Temperaturen mit negativen Zahlen gearbeitet. Die Schülerin sollte die in Abbildung 3 dargestellten Platzierungen in der Tabelle deuten.

<b>11</b>	FC Schalke 04	18	6	4	8	25:25	0	22
<b>12</b>	1. FC Nürnberg	18	6	4	8	22:29	-7	22
<b>13</b>	SV Werder Bremen	18	6	4	8	25:36	-11	22

Abbildung 3 Ausschnitt aus der Fußball-Bundesliga-Tabelle

Auf die Frage der Interviewerin, warum die Vereine in dieser Reihenfolge in der Tabelle stehen, antwortete sie bezogen auf die Tordifferenzen in der Tabelle: „Weil hier, die haben nur sieben Differenz also die haben, hm, also die (zeigt auf -11) haben sozusagen minus elf Grad und die (zeigt auf -7) minus sieben Grad also haben die's (zeigt auf -7) noch wärmer als die (zeigt auf -11)“ Zudem äußerte sie: „Weil, desto höher man geht, desto wärmer wird es (zeigt mit dem Stift von der Null nach oben) und desto tiefer man geht desto kälter wird es (zeigt mit dem Stift von der Null nach unten)“ und fertigte die in Abbildung 4 dargestellte Skizze an.

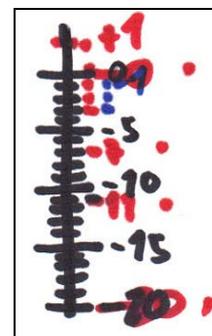


Abbildung 4 Skizze der Schülerin

Es lassen sich hieraus die Festlegung „Wenn eine Minuszahl einen kleineren Betrag hat als eine andere, dann ist es dort wärmer bzw. dann liegt sie höher.“ sowie als concept-in-action die Lage der negativen Zahlen auf der Zahlgerade rekonstruieren.

In den bereits vor dem Interview behandelten Kontexten konnte jeweils neben einem identischen concept-in-action bei der Schülerin auch die Festlegung rekonstruiert werden: „Wenn eine Zahl im Minusbereich einen kleineren Betrag hat als eine andere, dann liegt sie höher.“ Damit konnte rekonstruiert werden, dass horizontale Mathematisierungsprozesse als inferentielle Gliederung von Festlegungen zwischen Kontexten beschrieben

werden können. Die Festlegung sowie das concept-in-action können offenbar in verschiedenen Kontexten angewendet werden (siehe Abb. 5).

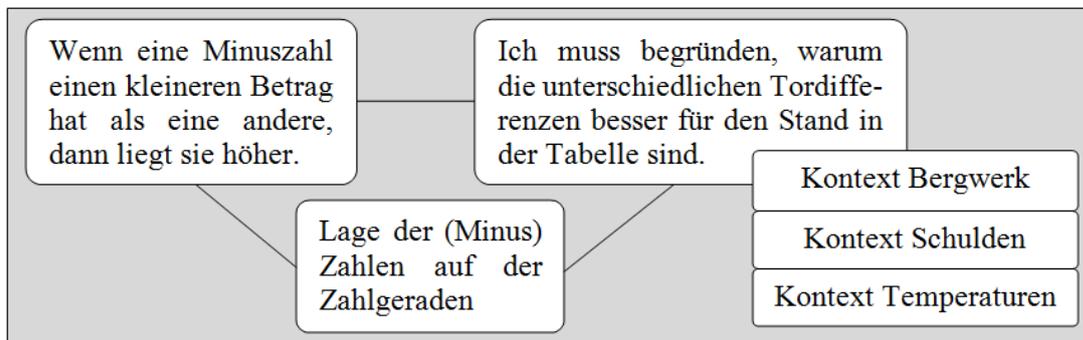


Abbildung 5 Rekonstruierter Begriffsgebrauch

Im Rahmen dieser Studie konnte der Gebrauch von Begriffen als Aktivierung und Übertragung von Festlegungen von Kontext zu Kontext rekonstruiert werden. Die ersten Ergebnisse lassen zudem erkennen, dass den Schülerinnen der Begriffsgebrauch negativer Zahlen in verschiedenen Kontexten vielfach gelang und inwiefern im Detail Schwierigkeiten im Gebrauch in neuen Situationen auftraten. Zudem zeigte sich u.a., dass ein Wechsel zu einem neuen Kontext den Schülerinnen die Möglichkeit bietet, sich auch i.S. vertikaler Mathematisierungsprozesse weiterzuentwickeln, was auch auf bereits bekannte Kontexte zurück übertragen werden kann. Der Frage, inwiefern Kontextwechsel in diesem Sinne als Lernchance genutzt oder für Schülerinnen als zusätzliche Lernhürde zunächst vermieden werden sollten, muss durch folgende Analysen weiter nachgegangen werden.

## Literatur

- Brandom, R. (2001): Begründen und Begreifen. Eine Einführung in den Inferentialismus. Frankfurt am Main: Suhrkamp.
- Hußmann, S. (2013): Raus aus den Schulden – Negative Zahlen. In: S. Prediger & al. (Hrsg.): Mathewerkstatt 6. Berlin.
- Hußmann, S. & Schacht, F. (2009): Toward an Inferential Approach Analyzing Concept Formation and Language Processes. Proceedings of CERME 6, January 28th-February 1st 2009, Lyon France, 842-851.
- Schacht, F. (2011): Mathematische Begriffsbildung zwischen Implizitem und Explizitem. Theoretische Fundierungen und empirische Untersuchungen individueller Begriffsbildungsprozesse im Mathematikunterricht unter besonderer Berücksichtigung des Muster- und Variablenbegriffs. Dortmund, bisl. unveröffentlichte Dissertation.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003): The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. In: Educational Studies in Mathematics, 54, 9-35.
- Vergnaud, G. (1996): The theory of conceptual fields. In L.P. Steffe & al. (Hrsg.): Theories of Mathematical Learning. Mahwah (NJ): Lawrence Erlbaum, 219-239.