

Ingo WITZKE, Köln

Zur Theorieentwicklung in der Mathematik

Ein grundlegendes Problem des schulischen Mathematikunterrichts ist in der Abstraktheit der zu vermittelnden Mathematik begründet. Mathematik ist die Lehre von formalen, d.h. uninterpretierten Systemen. Lehrerinnen und Lehrer versuchen diesem Problem zu begegnen, indem sie mit Hilfe von Unterrichtsmedien versuchen, die abstrakte Mathematik zu veranschaulichen. Im Geometrieunterricht etwa werden nicht logische Folgerungen aus einem inhaltlich unbestimmten Axiomensystem gezogen, sondern Geometrie wird als die Lehre vom physikalischen Raum vermittelt. Das Standardmedium im Geometrieunterricht ist das Zeichenblatt: Schülerinnen und Schüler kommen zu Erkenntnissen über Figuren durch Zeichnen und Falten. Sie fassen Geometrie als eine naturwissenschaftliche Theorie der Anschauungsmittel auf, oder mit einem Ausdruck der Wissenschaftstheorie: als eine *empirische Theorie*.¹

Der relativ neue kognitionspsychologische Ansatz der sogenannten „Theory theory“ postuliert eine ähnlich Interpretation sogar schon für Kleinkinder – unabhängig von spezifischen Inhalten – und unterstreicht damit den Nutzen einer erkenntnistheoretischen Analyse empirischer Theorien:

„[...] we will argue that children’s conceptual structures, like scientist’s, are theories, that their conceptual development is theory formation and change, and that their semantic development is theory-dependent“.²

Die Forschungsfrage, die sich an diese Beobachtung anschließt – Wie werden mathematische Theorien, im Sinne von *empirischen Theorien*, (weiter-) entwickelt? – erscheint insbesondere aus Sicht einer mathematikdidaktischen Grundlagenforschung eine notwendige.

Dieser Frage kann u.a. durch eine Analyse der Arbeiten (historischer) mathematischer Experten nachgegangen werden, für die wir auf ein außerordentlich gutes und systematisches Quellenmaterial für die *empirische Theorieentwicklung* in der Mathematik zurückgreifen können.

Denn eine der Entwicklungsgeschichte der Mathematik unangemessene Vorstellung ist es, anzunehmen mathematische Theorien entstünden im Allgemeinen auf Grundlage von einmal gesetzten (inhaltlich unbestimm-

¹ Vgl. Stuve, H. (1990): Grundlagen einer Geometriedidaktik.

² Gopnik, A., Meltzoff, A. N. (1997): Words, Thoughts, and Theories, S.11.

ten) Axiomensystemen und daraus logisch abgeleiteten Sätzen – wie in formalistischen Theorien im Sinne David Hilberts. Ist es doch

„vielmehr [...] in der Regel so, dass die Theorie, in der schließlich das Wissen zusammengefasst wird, in frühen Phasen ihrer Entstehung keine mathematische Theorie war – erst recht keine mathematische im heutigen Verständnis – sondern eine *empirische*, also eine Theorie mit einem Gegenstandsbereich“.³

Ziehen wir nun in Betracht, dass mathematische Theorien aus Sicht von Schülern *empirische Theorien* sind, sind für derartige Theorien relevante Fragen wie, „Gibt es Gesetzmäßigkeiten der Theorieentwicklung? Wie erhalten die für die Theorie charakteristischen Begriffe, insbesondere die *theoretischen Begriffe* – also solche ohne reale Referenzobjekte – ihre spezifische Bedeutung? Warum setzen sich gewisse Theorien gegenüber konkurrierenden Ansätzen durch?“ mit Gewinn für die mathematikdidaktische Forschung zu diskutieren. Sie ermöglichen ein vertieftes Verständnis für den Prozess mathematischer Wissensentwicklung.

Es gibt nun eine Vielzahl von Fallbeispielen aus der Geschichte der Mathematik, deren Studium wesentliche Einsichten über die Entwicklung mathematischen Wissens im Sinne einer mathematikdidaktischen Grundlagenforschung ermöglicht. Ein besonders geeignetes Fallbeispiel scheint in der Differential- und Integralrechnung im 17. und 18. Jahrhundert vorzuliegen.

Diese Differential- und Integralrechnung wurde von Gottfried Wilhelm Leibniz und Isaac Newton etwa gleichzeitig konzipiert. Leibniz entwickelte den *Calculus differentialis* sowie den *Calculus integralis* im ausgehenden 17. Jahrhundert zur Diskussion von realen Gegenständen, d.h. durch Konstruktionen gegebene Kurven. Ziel war es systematisch Steigungen von Tangenten, Maxima und Minima, Wendepunkte, Flächeninhalte und Bogenlängen berechnen zu können. Im Sinne der modernen Wissenschaftstheorie ist die *leibnizsche Differential- und Integralrechnung* als eine *empirische Theorie* zu bezeichnen, deren Gegenstandsbereich gegebene Kurven sind.

Der zentrale Begriff dieser Theorie – um dessen Bedeutung in der Wissenschaftsgeschichte bis heute gestritten wird – ist der der „unendlich kleinen Größe“, bzw. der des „Differentials einer Größe“. Eine *historisch-mathematische Rekonstruktion* des Calculus ermöglicht die Bedeutungsentwicklung dieses *theoretischen Begriffs* zu klären, und darüber hinaus als einen

³ Burscheid, H. J., Stuve, H. (2010): Mathematikdidaktik in Rekonstruktionen. Ein Beitrag zu ihrer Grundlegung, S. 264-265.

Kernpunkt mathematischer Wissensentwicklung zu problematisieren und zu diskutieren.⁴

Literatur

- Burscheid, H. J., Stuve, H. (2010): Mathematikdidaktik in Rekonstruktionen. Ein Beitrag zu ihrer Grundlegung: Hildesheim et al.: Franzbecker
- Gopnik, A. (2010): Kleinkinder begreifen mehr. In: Spektrum der Wissenschaft, 10, S. 69-73.
- Gopnik, A., Meltzoff, A. N. (1997): Words, Thoughts, and Theories: The MIT Press: Cambridge, Massachusetts et al.
- Stuve, H. (1990): Grundlagen einer Geometriedidaktik. Knoche, N., Scheid, H. (Hrsg.): Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik, Bd.17: Mannheim et al.: BI-Wissenschaftsverlag.
- Struve, H., Witzke, I. (2008): Eine wissenschaftstheoretische Analyse des Leibniz'schen calculus – das Beispiel des Krümmungsradius. In: Studia Leibnitiana, Bd. XL, Heft 1, S. 29-47.
- Witzke, I. (2009): Die Entwicklung des Leibnizschen Calculus. Eine Fallstudie zur Theorieentwicklung in der Mathematik: Hildesheim et al.: Franzbecker.

⁴ Witzke, I. (2009): Die Entwicklung des Leibnizschen Calculus. Eine Fallstudie zur Theorieentwicklung in der Mathematik, S. 335ff.

