Peter WOLFF, Düsseldorf

Förderung mathematischen Denkens in der elementaren Algebra

Im Jahre 1936 hat der Logiker A. Tarski darauf hingewiesen, daß Ausdrücke wie „Gleichung“, „Ungleichung“, „Polynom“ oder „Bruch“ nicht „in den Bereich der Mathematik gehören“, also keine mathematischen Gegenstände bezeichnen. Zitat:

Zum Beispiel kann der Lehrsatz „Die Gleichnug $x^2+ax+b=0$ hat höchstens zwei Wurzeln“ auf zutreffendere Weise in der Form „Es gibt höchstens zwei Zahlen x, so daß $x^2+ax+b=0$“ ausgesprochen werden. (Zitat-Ende).

Tarski meinte, mit diesem Gebrauch außermathematischer Objekte in der Mathematik sei keine besondere Gefahr verbunden – allerdings dachte er dabei an erwachsene Mathematiker, nicht an Schüler.

Heute, im Jahre 2011, kann die Liste solcher Objekte um einiges erweitert werden: „Variable“, „Platzhalter“ , „Gebrauchsname“, „Term“, „Zahlname“, „Aussage“, „Aussageform“, Äquivalenzumformung“, „Ungleichungsumformung“, „Umformungsregeln“, etc. Diesmal trifft es aber nicht Mathematiker, sondern Schüler, die (eigentlich) Mathematik lernen sollen. Diese sollen diverse Umformungsregeln (auswendig) lernen und formal anzuwenden üben, in Variable (Platzhalter) Terme einsetzen, für einen Term „eine neue Variable einführen“, etc. etc.

In Gegensatz zu dieser Auffassung von elementarer Algebra besteht der eigentliche, hinter den Formaloperationen stehende mathematische Gegenstand aus Zahlen und Größen (aus bekannten und unbekannten, aus bestimmten und unbestimmten, aus konstanten und veränderlichen), aus Aussagen über solche Zahlen bzw. Größen (meist in Form von Gleichungen, welche Beziehungen beschreiben) – und schließlich aus Beziehungen zwischen solchen Beziehungen (Aus $x^2-3x+2=0$ folgt $x=1 \vee x=2$)

Versteht man unter Mathematik treiben bzw. mathematischem Denken das Befassen mit mathematischen Gegenständen, so muß der Schulunterricht primär und vorzugsweise das Denken an Zahlen, Größen, mathematische Gegenstände, die gedankliche Konstruktion und Interpretation von Aussagen über diese Objekte – und das Folgern zwischen solchen Aussagen fördern – und dies statt sich zu sehr auf das korrekte Ausführen formaler Operationen zu konzentrieren.

Damit erst werden die Grundlagen geschaffen für einen verstehenden Umgang mit der mathematischen Fachsprache „um die Formeln herum“.

Selbstverständlich müssen Schüler letztlich auch den sinnvollen Gebrauch der heute üblichen und bewährten mathematischen Fachsprache lernen – sie sollten das aber in ähnlicher Weise tun können wie sie eine Fremdsprache lernen würden (bzw. wie sie ihre Muttersprache gelernt haben): als ein praktisches und effektives Mittel, mathematische Gedanken, die zunächst einmal als solche gedacht werden, mitzuteilen und sich darüber auszutauschen – bzw. mit den Ergebnissen nachträglich zu arbeiten..

Der wohl stets vorhandene Hang (jedenfalls bei Schülern) zur Beschränkung auf einen Formalismus (auf das, was hingeschrieben werden soll, auf das „Lösen einer Algebraaufgabe als Ausfüllübung ohne Zwischentext"- s. Freudental) wurde durch die erste „Reform der Gleichnugslehre" (Lauter, Wäsche, Steiner, Pickert), die in bester Absicht initiiert wurde, eher verstärkt.

Seit der zweiten Reform (G. Malle, Fischer, Bürger) hat man sich immerhin von dem in der ersten Reform verbreiteten Irrtum befreit, man dürfe an soetwas wie Unbestimmte, allgemeine Zahl, Veränderliche nicht denken, da es solche Objekte „in der Ontologie der Mathematik" nicht gebe. Heute untersucht man, wann welche Schüler unter welchen Voraussetzungen imstande sind, Begriffe wie den der Unbestimmten gedanklich zu bilden und zu benutzen.

Aus Sicht des Autors ist das erst ein Anfang. Hinzu kommt, daß zwei weitere Irrtümer bis heute nicht ausgeräumt sind: erstens identifiziert man Platzhalter, Terme, Bedarfsnamen (also Schreibfiguren) mit den referierten Objekten (etwa den Zahlen) selbst, und zweitens wird oft nicht konsequent unterschieden zwischen Bestandteilen einer „Objektsprache" (=Sprache, die Objekt der Betrachtung ist - etwa die Gleichung, die als Aussageform aufgefaßt wird) und der mathematischen Umgangssprache, in der sowohl über Zahlen (allg.: mathematische Objekte- etwa die Lösungen einer Gleichung, die mit anderen Zahlen in einer zu beschreibenden Beziehung stehen) als auch über Bestandteile der Objektsprache gesprochen wird - wobei im letzteren Fall die Umgangssprache als Metasprache fungiert. Beide Fehler führen zu gedanklichen Inkonsequenzen und Ungereimtheiten – und können sogar zu begrifflichen Absurditäten führen (Da verwandelt sich dann die Aussageform $ax+b=0$ plötzlich in die Aussage $b=0$, weil „dem Platzhalter a eine andere Grundmenge zugrundegelegt wird und x die Gleichungsvariable ist").

Hier sei an nur einem (i.S. des Autors positiven) Beispiel angedeutet, was gemeint ist.

Aufgabe: Bestimme alle reellen Zahlen x, für die $x^2-28x-1568=0$ ist.

Lösung: Ich denke mir eine solche Zahl x gegeben. Für diese gilt also $x^2-28x-1568=0$

Es folgt $x^2-28x=1568$...$x^2-28x+14^2=1568+14^2$...$x^2-28x+14^2=1764$.

Nun gilt ja für je zwei reelle Zahlen a,b: $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.

Das gilt speziell auch für die Zahlen x und 14: $x^2-28x+14^2=x^2-2\cdot x\cdot 14+14^2=(x-14)^2$.

Damit folgt $(x-14)^2=1764$, also $\sqrt{(x-14)^2}=\sqrt{1764}$.

Für jede Zahl a gilt $\sqrt{a^2}=|a|$. Für die Zahl x-14 gilt also $\sqrt{(x-14)^2}=|x-14|$.

Damit folgt $|x-14|=42$.

Für jede Zahl a gilt $|a|=a$ für $a\geq 0$ und $|a|=-a$ für $a<0$. Für die Zahl x-14 gilt daher:

$|x-14|=x-14$ für $x-14\geq 0$ und $|x-14|=-(x-14)$ für $x-14<0$....

Im Fall $x\geq 14$ folgt $x-14=42$, also $x=56$. Im Fall $x<14$ folgt $-x+14=42$, also $x=-28$.

Daher ist x entweder die Zahl 56 oder die Zahl -28: $x=56 \vee x=-28$.

Als Lösungen kommen daher nur diese beiden Zahlen infrage. Wegen $56^2-28\cdot 56-1568=0$ und $(-28)^2-28\cdot(-28)-1568=0$ sind beides Zahlen mit $x^2-28x-1568=0$

Die Menge aller dieser Zahlen ist daher $L=\{56, -28\}$

Formal ist das der Lösungsweg, der vom Lehrer meiner Nachhilfeschülerin verlangt wurde – allerdings ergänzt um den (in Schülerköpfen meist fehlenden) Zwischentext. Und: Wörter wie Gleichung, Variable, Einsetzen, Zahlen für x, umformen u.ä. kommen hier nicht vor.

Genauere Ausführungen, Begründungen und Empfehlungen finden sich im Internet unter http://peter.wolffcarsten.de. Ein Kontakt mit dem Autor kann per E-Mail an die Adresse peter@wolffcarsten.de hergestellt werden.

Hier seien die Hauptgesichtspunkte und Intentionen des Autors in Thesen zusammengefaßt:

- Der auch heute wirksame Überbau des mathematischen Gegenstands durch einen formalen Kalkül (nach dem Vorbild der math. Logik) bewirkt eine Überfrachtung mit Formalismen. Dadurch wird das Denken des Schülers auf die Schreibfiguren und deren Manipulation fokussiert und abgelenkt von den mathematischen Gegenständen.

- Ziel des Schulunterrichts in der elementaren Algebra muß sein, das mathematische Denken der Schüler zu fördern. Dazu gehören u.a. die Konzepte der Unbekannten, der Unbestimmten und der Veränderlichen – und Denkschemata, die solche Konzepte verwenden. Denn diese sind grundlegend zum Verstehen nicht nur der elementaren Algebra, sondern für die gesamte Mathematik. Sie bilden einen wesentlichen Teil mathematischen Denkens.
- Das, was geschrieben wird, hat für den schreibenden/lesenden Schüler erst dann einen Sinn, eine Bedeutung, wenn der in den Schreibfiguren ausgedrückte Sinn/der Gedanke vom Schüler gedacht wird – am besten, bevor er erfährt, was er in welcher Situation hinschreiben muß, damit der Lehrer zufrieden ist. Damit der Sinn gedacht wird, müssen die notwendigen Denkweisen und Denkschemata vom Schüler gelernt werden, durch kreative und konstruktive Tätigkeit seines Denkens. Dazu aber braucht der Schülers Anstöße (Impulse) von außen, durch Kommunikation. Das, was er etwa beim Lösen einer Gleichung denkt (der „Zwischentext"), ist wichtiger als das, was er hinschreibt. Konsequenz: Unterrichtskultur und Aufgabenwahl sind so zu gestalten, daß Schülern solche Impulse zuteil werden.
- Bei entsprechender Entwicklung des mathematischen Denkens kann weitgehend auf das Einüben rein-formaler Manipulationen wie etwa das Anwenden von Umformungsregeln (die womöglich auswendig gelernt werden) verzichtet werden.
- Unbekannte und Unbestimmte müssen bereits von Kindern in den ersten Schuljahren gedacht werden, nicht erst ab dem 5., 6. oder gar 7. Schuljahr, wenn „Gleichungen mit x" behandelt werden.

Empfehlung an die Mathematikdidaktik:

Einmal systematisch zu untersuchen, ob eine Auffassung von „elementarer Algebra", wie sie hier angedeutet ist, und ein entsprechender Unterricht nicht effektiver sein kann für das mathematische Verständnis der Schüler als die bisher noch übliche Auffassung und das übliche Vorgehen, bei dem der Hauptakzent auf dem formalen Umgang mit Schreibfiguren liegt.