

Dirk BROCKMANN-BEHNSEN, Hannover

## HeuRekAP – Erste Ergebnisse der Langzeitstudie zum Problemlösen und Beweisen am Gymnasium

Nach einer Tendenz in den 70er und 80er Jahren, in der die Beweiskultur auf Grund ihres formalen Charakters in den Schulen zurückgeschraubt wurde, kam es in den 90er Jahren zu einer Gegenentwicklung. Das formelle Beweisen wurde nun als letzte Stufe einer altergemäß zu entwickelnden Argumentationskultur verstanden. Das niedersächsische Kerncurriculum nennt als mögliche Handlungen im Rahmen einer solchen Entwicklung beispielsweise das „Erkunden von Situationen, Strukturieren von Informationen, Fragen stellen, Aufstellen von Vermutungen, Angeben von Beispielen und Plausibilitätsbetrachtungen, über das schlüssige (auch mehrschrittige) Begründen bis hin zum formalen Beweisen“ (MK Nds. 2006, S. 13).

Boero (1999) unterteilt den Beweisprozess in sechs Phasen: (1) Untersuchung eines Sachverhaltes und Aufstellen einer Vermutung, (2) Formulieren einer Aussage gemäß fachlicher Konventionen, (3) Erforschen des Umfeldes der Vermutung, (4) Auswahl und Aneinanderreihung von Argumenten in eine deduktive Reihe, (5) Publizierbare Verschriftlichung dieser deduktiven Reihe und (6) Erreichen mathematischer Strenge. Alterangemessen sollen die Schülerinnen und Schüler in der ersten Phase des HeuRekAP Projektes einige dieser „Boerophasen“ durchlaufen.

### Die Studie

Das HeuRekAP Projekt wird über einen Zeitraum von insgesamt zwei Schuljahren, beginnend im achten Jahrgang, in vier Klassen eines hannoveraner Gymnasiums durchgeführt. Zwei dieser Klassen werden vom Autor unterrichtet (Trainingsgruppe, N=59). Ziel des Projektes ist eine Verbesserung der Problemlöseleistung der Schülerinnen und Schüler durch ein gezieltes Heuristiken- und Argumentationstraining. Die beiden anderen Klassen dienen als Vergleichsgruppe (N=59). In der ersten Projektphase, die sich etwa über die ersten sechs Wochen erstreckte, wurde eine Studie zur Entwicklung der Beweiskompetenz durchgeführt. Im Unterricht entdeckten die Schülerinnen und Schüler unter anderem gemäß Boerophase (1) den Satz des Thales an



**Abbildung 1:** Die Unterrichtseinheit „Winkel am Kreis“


Hand von elektronischen Arbeitsblättern (Elschenbroich & Seebach 2002) und lernten im Sinne von Boerophase (4) respektive (5) ein Schema zur Beweisdarstellung kennen, das dem Schulbuch „Neue Wege“ (Lergenmüller & Schmidt 2007, S. 72) entstammt.

Im Rahmen dieser Studie sollen nun folgende Fragen beantwortet werden:

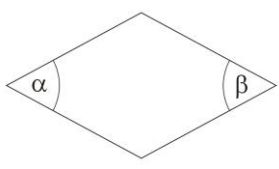
- Hat das durchgeführte Beweistraining einen Effekt auf die Argumentationskompetenz der Schülerinnen und Schüler?
- Sind die Schülerinnen und Schüler bei Benutzung des eingeführten Beweisschemas erfolgreicher als ohne?

### Methodik

Im Rahmen eines Vor- und Nachtests wurden den Schülerinnen und Schülern verschiedene Aufgaben unter anderem aus der VERA 8 Literatur gestellt, die mehrschrittige Lösungswege nebst Begründungen erforderten. In diesem Artikel werden die Bearbeitungsergebnisse je einer Aufgabe aus dem Vortest und einer aus dem Nachtest vorgestellt:

<p><b>Aufgabe 2.3:</b> Eine Raute wird von einer seiner Diagonalen in zwei Dreiecke zerschnitten. Begründe, warum diese Dreiecke kongruent zueinander sind. Schreibe alle Überlegungen und Begründungen schrittweise auf.</p>	
---	---

**Abbildung 2:** Untersuchte Vortestaufgabe (vgl. Griesel, Postel & Suhr 2006, S. 27f.)

<p><b>Aufgabe 4:</b> Eine Raute wird definiert als ein Viereck mit vier gleichlangen Seiten.</p>	
<p><b>Voraussetzung:</b> Gegeben sei eine Raute mit zwei gegenüberliegenden Innenwinkeln <math>\alpha</math> und <math>\beta</math>. <math> \alpha  =  \beta </math></p>	<p><b>Skizze:</b></p> 
<p><b>Behauptung:</b></p>	
<p><b>Beweis:</b></p>	
<p><b>Beweisschritt:</b></p>	<p><b>Begründung:</b></p>

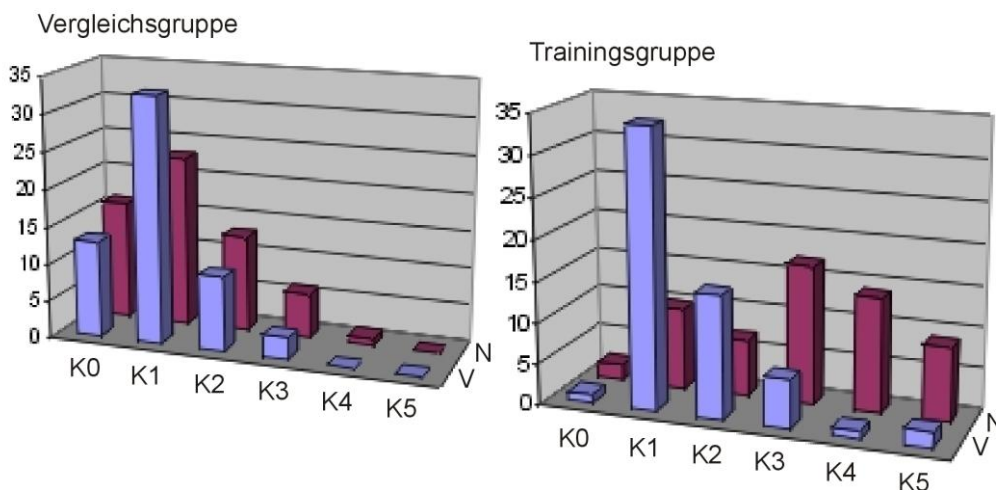
**Abbildung 3:** Untersuchte Nachtestaufgabe (vgl. Beuthan 2008<sup>3</sup>, S.53)

Die Qualität der Aufgabenbearbeitungen der Schülerinnen und Schüler aus der Trainingsgruppe und aus der Vergleichsgruppe jeweils vor und nach dem Training wurden verglichen. Zu diesem Zweck erfolgte eine Einteilung der Bearbeitungen in folgende sechs Kategorien:

<b>K0</b>	<b>Kein Ansatz</b> Es findet keine Bearbeitung der Aufgabe statt bzw. es werden nur vollständig sachfremde Dinge notiert oder Teile der Aufgabenstellung wiederholt. .
<b>K1</b>	<b>Fragmente</b> Unzusammenhängend werden einzelne Hilfsmittel, Sätze, Umformungsmodalitäten notiert, von denen einige oder alle für bestimmte Schritte bei der Bearbeitung der Aufgabe hilfreich wären.
<b>K2</b>	<b>Deduktive Keimzellen</b> Es werden probate Hilfsmittel, Sätze, Umformungsmodalitäten etc. notiert, die vereinzelt auch logisch miteinander in Verbindung gebracht werden.
<b>K3</b>	<b>Deduktives Skelett</b> Die Struktur einer deduktiven Schlusskette mit dem Versuch der Hinführung zur Behauptung oder deren Widerlegung ist erkennbar, allerdings gibt es noch größere Lücken in der Kette, demzufolge das Ergebnis auch nicht korrekt sein muss.
<b>K4</b>	<b>Deduktiver Torso</b> Es liegt eine im Wesentlichen korrekte deduktive Schlusskette vor, die auf das richtige Ergebnis, also im Falle von Entscheidungsaufgaben auf die Behauptung oder deren Widerlegung, im Falle von Bestimmungsaufgaben auf die Lösung führt. Diese Kette enthält allenfalls noch vereinzelt kleinere logische Unstimmigkeiten oder Rechenfehler.
<b>K5</b>	<b>Deduktiver Körper</b> Es liegt eine vollständig korrekte deduktive Schlusskette vor, die allenfalls kleinere Rechenfehler enthält.

## Erste Ergebnisse

Die Trainingsgruppe erzielte in Bezug auf die oben beschriebenen Aufgaben nach dem Training (N) wesentlich bessere Ergebnisse als vorher (V), die Vergleichsgruppe erreichte keine nennenswerte Verbesserung. Die absoluten Werte der Kategorienvergabe liefern einen ersten Eindruck:



Wilcoxon Tests bestätigen die zentrale Tendenz bei der Vergleichsgruppe, während die entsprechende Nullhypothese bei der Trainingsgruppe auf einem 1% Signifikanzniveau verworfen werden muss.

## Diskussion und Ausblick

Die Durchführung der Unterrichtseinheit „Winkel am Kreis“, bei der ein Schwerpunkt auf die Kompetenz des Argumentierens gelegt wurde, hat gezeigt, dass Schülerinnen und Schüler auch unter Schulalltagsbedingungen durchaus in der Lage sind, vollständige Beweisprozesse im Sinn von Boero eigenständig zu durchlaufen, sofern diese Prozesse im Unterricht durch geeignete Medien (z.B. elektronische Arbeitsblätter) und Strukturierhilfen (z.B. Beweisschema aus dem Schulbuch „Neue Wege“) flankiert werden.

Bezüglich der untersuchten Aufgaben zeigte sich im Gegensatz zu der Vergleichsgruppe bei der Trainingsgruppe ein signifikanter Effekt bezüglich des Zuwachses an Argumentationskompetenz. Die Auswertung weiterer Aufgaben aus dem Vor- und Nachtest muss zeigen, ob sich dieser Effekt bestätigen lässt. Insbesondere interessiert die Frage, ob die Schülerinnen und Schüler die an Hand von Geometrieaufgaben erlernten Kompetenzen auf andere Bereiche der Mathematik wie beispielsweise die Algebra transferieren können. Erste Sichtungen entsprechender Aufgaben aus den Vor- und Nachtests lassen vermuten, dass dies eher nicht der Fall ist.

Ebenfalls interessant für zukünftige Auswertungen ist das Abschneiden der Schülerinnen und Schüler der Trainings- bzw. Vergleichsklassen bei der zentralen Erhebung VERA 8 vom 01.03.2012. Die dortige Aufgabe 5.3 erfordert Argumentationskompetenz im Umfeld der Algebra:

*„Gegeben sind nun allgemein zwei aufeinanderfolgende Zahlen  $b$  und  $a$  mit  $b = a - 1$ . Begründe, dass die folgende Rechenregel immer stimmt: Die Differenz  $a^2 - b^2$  ist gleich der Summe  $a + b$ .“*

Lediglich eine Schülerin und ein Schüler aus der Trainingsgruppe haben diese Aufgabe richtig gelöst, einmal mit dem Beweisschema, einmal ohne.

## Literatur

- Beuthan, S. (2008<sup>3</sup>): *VERA 8. Sicher in die Vergleichsarbeit. Mathematik 8. Klasse*, 3. überarbeitete Auflage, Stuttgart, 2008
- Boero, P. (1999): Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematical education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, Juli / August 1999
- Elschenbroich, H.-J. & Seebach, G. (2002): *Dynamisch Geometrie entdecken. Elektronische Arbeitsblätter mit Euklid DynaGeo*, CoTec-Verlag
- Griesel, H; Postel, H. & Suhr F. (Hrsg., 2006): *Elemente der Mathematik 7. Niedersachsen*, Braunschweig, Bildungshaus Schulbuchverlage
- Lergenmüller, A. & Schmidt, G. (Hrsg., 2007): *Mathematik Neue Wege 8. Arbeitsbuch für Gymnasien. Niedersachsen*, Braunschweig, Bildungshaus Schulbuchverlag