

Matthias BRANDL, Passau

Das isoperimetrische Problem für Dreiecke

Während sich das isoperimetrische Problem für Rechtecke in der Regel in Schulbüchern der Sekundarstufe finden lässt, taucht dessen Pendant für Dreiecke nicht auf. Im Hinblick auf die Winter'sche Grunderfahrung, Mathematik „als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen“ (Winter, 1996), findet sich zum Teil in Haag (2003) ein elementarer Weg, der algebraische und geometrische Aspekte auf schöne Weise verknüpft und so auf einem wenig ausgetretenen Pfad „unterwegs“ zu vielen (elementar)mathematischen Einsichten verhilft. Zudem wird beispielhaft die Kraft elementarer Methoden im Rahmen von Optimierungsproblemen in mehr als einer Variablen aufgezeigt.

1. Das isoperimetrische Problem

In allgemeiner Form lautet das isoperimetrische Problem wie folgt: *Finde eine geschlossene Kurve, die den größten Inhalt bei gegebenem Umfang einschließt.*

In seiner Spezialisierung auf *Rechtecke* findet sich das isoperimetrische Problem – wenn auch nicht unter diesem Namen (eher: „die Suche nach dem Superrechteck“ o. ä.) – in aktuellen Schulbüchern wieder. Mehrere schöne elementare Wege zur Lösung dieser Extremwertaufgabe finden sich z. B. in Danckwerts & Vogel (2001a, 2001b). Dort findet sich u. a. auch der hier praktizierte Weg über die Mittelungleichung.

1. Die Mittelungleichung

In Hinblick auf das isoperimetrische Problem für *Dreiecke* wird die Mittelungleichung für das arithmetische und das geometrische Mittel in drei Variablen benötigt:

Sind x_1 , x_2 und x_3 drei positiv-reelle Zahlen, $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ ihr arithmetisches

und $\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$ ihr geometrisches Mittel, so gilt $\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, wobei

Gleichheit genau dann eintritt, wenn $x_1 = x_2 = x_3$.

Elementare algebraische Beweise (ohne das Prinzip der vollständigen Induktion), die sich für die Schule eignen, findet man z. B. in Schupp (1997, S. 5) oder Roth-Sonnen et al. (2004, S. 83), einen schönen geometrischen Beweis ebenfalls in Letztgenanntem bzw. ausführlicher in Cofman (1995, S. 196/197).

Für Zwecke der Optimierung wird folgender Zusammenhang verwendet, der direkt aus der Mittelungleichung folgt (Erreichen der oberen Schranke):

Ein Produkt dreier positiver Zahlen, deren Summe konstant ist, ist maximal genau dann, wenn diese Zahlen gleich sind.

2. Ein interessanter Weg zum Satz von Heron

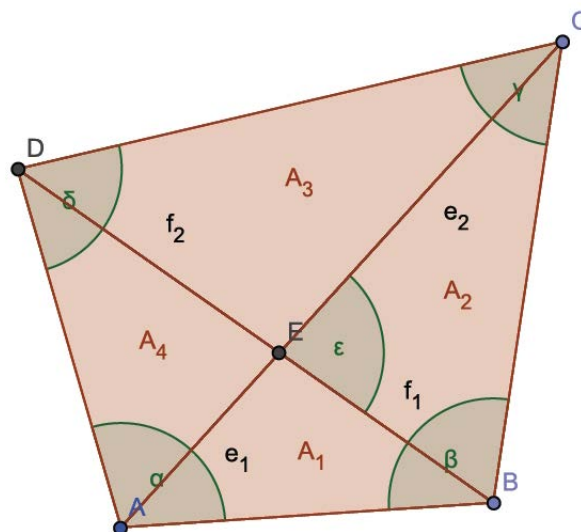
Zur Lösung des isoperimetrischen Problems für Dreiecke eignet sich die übliche Flächeninhaltsformel $A = \frac{1}{2}gh$ eher weniger. Als vorteilhaft stellt sich hier die in den Curricula vernachlässigte Formel von Heron dar:

$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ mit $s = \frac{a+b+c}{2}$. Diese kann zwar elementar z. B.

mit Hilfe des Satzes von Pythagoras hergeleitet werden; das Vorgehen, das in Haag (2003, S. 53 - 55) aufgezeigt wird, bietet sich allerdings als (elementar)mathematisch bzw. (elementar)geometrisch reichhaltige Alternative an, die eine Fülle an zusätzlichen Einsichten bereithält.

Ausgangspunkt ist eine Extremwertaufgabe: *Welches Viereck hat bei vorgegeben Seitenlängen den größten Flächeninhalt?*

Zur Beantwortung dieser Frage wird das Viereck durch dessen Diagonalen in vier Teildreiecke zerlegt:



Die Gesamtfläche des Vierecks ergibt sich dann als Summe der Teilflächen:

$$\begin{aligned}
 A &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \frac{1}{2}e_1f_1 \sin(180^\circ - \varepsilon) + \frac{1}{2}e_2f_1 \sin \varepsilon + \frac{1}{2}e_2f_2 \sin(180^\circ - \varepsilon) + \frac{1}{2}e_1f_2 \sin \varepsilon \\
 &= \frac{1}{2}f_1(e_1 + e_2) \sin \varepsilon + \frac{1}{2}f_2(e_1 + e_2) \sin \varepsilon = \frac{1}{2}ef \sin \varepsilon
 \end{aligned}$$

Wendet man zudem den Kosinussatz auf jedes Teildreieck an, so erhält man nach analogen Umformungen: $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2ef \cos \varepsilon$.

Hier fallen bereits erste Sätze ab:

Genau dann, wenn in einem Viereck $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 0$ gilt, hat das Viereck orthogonale Diagonalen. (Satz 2.4.1 in Haag 2003)

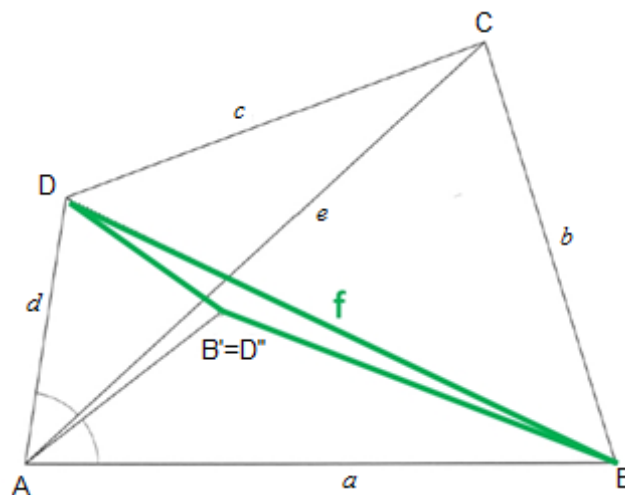
Verformt man ein Viereck mit orthogonalen Diagonalen gelenkig, so bleibt der rechte Winkel der Diagonalen erhalten. (Satz 2.4.2 in Haag 2003)

Eine interessante Folgerung davon ist: „Bei Vierecken mit Diagonalen, welche nicht senkrecht aufeinander stehen, kann dies durch eine gelenkige Verformung niemals erreicht werden.“ (Haag 2003, S. 54) Dieser Sachverhalt (bzw. derjenige aus dem vorausgehenden Satz) kann z. B. durch den Einsatz dynamischer Geometriesoftware wie GEONExT oder GeoGebra anhand von Vierecken mit entsprechend gewählten Seitenlängen sehr schön veranschaulicht werden.

Quadriert man nun die Formeln $A = \frac{1}{2}ef \sin \varepsilon$ und $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2ef \cos \varepsilon$, bildet dann die Summe und wendet den Satz des Pythagoras für trigonometrische Funktionen an, so erhält man $(e \cdot f)^2 = 4 \cdot A^2 + \frac{1}{4} \cdot (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2$.

Bei vorgegebenen Seitenlängen ist der zweite Summand auf der rechten Seite als konstant anzusehen, so dass die Fläche eines Vierecks mit konstantem Umfang genau dann maximal wird, wenn das Produkt der beiden Diagonalenlängen e und f maximal ist.

Mittels zweier geschickt gewählter Drehstreckungen des Dreiecks ABC (siehe Skizze unten) um A, so dass $C' = D$ ist, und des Dreiecks ACD um A, so dass $C'' = B$ ist, erhält man aufgrund der Ähnlichkeit der jeweiligen Dreiecke die Entsprechungen $\overline{DB'} = b' = b \cdot \frac{d}{e}$ und $\overline{B''B} = c' = c \cdot \frac{a}{e}$; außerdem gilt $\sphericalangle AB'D = \beta$ und $\sphericalangle AB''B = \delta$. Die folgende Abbildung ist Haag (2003) entnommen (Fig. 2.34) und illustriert noch einmal die Situation:



Es gilt somit im Dreieck BDB' (bzw. BDD'' , da $B'=D''$) für den „langen Umweg“ über B' , dass $\overline{DB'} + \overline{B'B} = \frac{b \cdot d}{e} + \frac{a \cdot c}{e}$. Die Anwendung der Dreiecksungleichung führt dann zu $f = \overline{DB} \leq \overline{DB'} + \overline{B'B} = \frac{b \cdot d}{e} + \frac{a \cdot c}{e}$ bzw. vereinfacht zu $e \cdot f \leq a \cdot c + b \cdot d$. Aus der Geometrie erkennt man nun, dass Gleichheit genau dann gilt, wenn B' auf $[BD]$ liegt, d.h. $\sphericalangle AB'D + \sphericalangle AB'B = \beta + \delta = 180^\circ$, also wenn $ABCD$ ein Sehnenviereck ist. Dies stellt die Aussage des **Satzes von Ptolemäus** inklusive Umkehrung dar. Die Einführung der neuen Variable $s = \frac{U}{2} = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$ im Ausdruck $(e \cdot f)^2 = 4 \cdot A^2 + \frac{1}{4} \cdot (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2$ mit $e \cdot f = a \cdot c + b \cdot d$ führt nach algebraischen Umformungen (evtl. mit Hilfe eines CAS) auf den **Satz von Brahmagupta**: *Ein Sehnenviereck besitzt den Flächeninhalt* $A = \sqrt{(s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c) \cdot (s-d)}$. Der **Satz von Heron** ergibt sich nun für den Spezialfall (eines zum Dreieck entarteten Sehnenvierecks) $d = 0$.

3. Anwendung der Mittelungleichung

Analog zum Vorgehen in Dörrie (1972) ist die Fläche eines Dreiecks mit konstantem Umfang gemäß des Satzes von Heron nun genau dann maximal, wenn das Produkt $(s-a)(s-b)(s-c)$ maximal ist. Da die Summe dieser Faktoren genau den Umfang ergibt und damit konstant ist, folgt mit der Mittelungleichung, dass sich die maximale Fläche genau dann einstellt, wenn $s-a = s-b = s-c$ gilt, also für *gleichseitige* Dreiecke.

Literatur

- Cofman, J. (1995). Numbers and Shapes Revisited. New York: Oxford University Press.
- Danckwerts, R., Vogel, D. (2001a). Extremwertaufgaben im Unterricht – Wege der Öffnung. In: MU, 4, 9 - 15.
- Danckwerts, R., Vogel, D. (2001b). Extremwertprobleme ohne Analysis – die Kraft elementarer Methoden. In: MU, 4, 32 - 38.
- Dörrie, H. (1972). Ein neues elementares Verfahren zur Lösung von Extremwertaufgaben. In: MU, 5, 23 - 51.
- Haag, W. (2003). Wege zu geometrischen Sätzen. Stuttgart: Klett.
- Roth-Sonnen, N., Stein, G., Stengel, A. (2004). Knobel-Aufgaben für die 9. und 10. Klasse. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.
- Schupp, H. (1997). Optimieren ist fundamental. In: ml, 81, 4 - 10.
- Winter, H. (1996). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 61, 37 - 46.