

Dirk BROCKMANN-BEHNSEN, Hannover

Zwei-Tore-Regel und Zwei-Spalten-Beweis

Ein Ziel des hannoverschen HeuRekAP Projektes ist es, die Beweis-¹ und Argumentationskompetenz der Schüler² zu verbessern. Dazu musste im Vorfeld einerseits geklärt werden, wie ein Unterricht gestaltet werden soll, in dem die Schüler gut und gerne argumentieren und korrekte Beweise führen und andererseits, welche Form solche Beweise haben sollten (vgl. Herbst 2002, S. 283 f.).

Eine Schlüsselrolle bei der Unterrichtsgestaltung spielen dabei gezielt gestellte Fragen des Lehrers an die Schüler, welche diese dann im Laufe des Unterrichtes immer weiter verinnerlichen und sich schließlich selbst stellen.

Der vielleicht berühmteste entsprechende Fragenkatalog stammt von Pólya (1949). Dort finden sich unter anderem die Fragen:

„Kennst Du einen Lehrsatz, der förderlich sein könnte?“ sowie „Wenn Du Deinen Plan der Lösung durchführst, so *kontrolliere jeden Schritt*. Kannst Du deutlich sehen, daß der Schritt richtig ist? Kannst Du beweisen, daß er richtig ist?“ Bei Schoenfelds (1992, S. 356) Untersuchungen fungiert der Lehrer auch als „Roving Consultant“, der unter anderem beständig die Fragen stellt: „Why are you doing it?“ und „How does it help you?“ (ibid.).

Bezüglich der Frage nach

Aufgabe 2:

AB ist der Durchmesser eines Halbkreises k , C ist ein beliebiger Punkt auf dem Halbkreis (verschieden von A und B), und M ist der Mittelpunkt des Inkreises von ABC. Bestimme den Betrag des Winkels $\angle AMB$

$\delta = \text{gesucht}$

Nr.	Schritt	Begründung
1	Bezeichnungen, Hilfslinien (siehe Skizze) $ A' + A'' = A $ $ B' + B'' = B $	Hilfslinien Bezeichnungen
2	$\angle F = 90^\circ$	S.d.T.
3	$ A' + B' = 90^\circ$	2, IWS
4	Mittelpunkt von allen Seiten ermitteln $r = r' = r''$	Radius von k
5	h, l Winkelhalbierende	4
6	$ A' + B' = 45^\circ$	von 5, 1
7	$\delta = 180^\circ - 45^\circ$	IWS, 6
8	$ \delta = 135^\circ$	7 d.e.d.

Abbildung 1: Zwei-Spalten-Beweis eines Neuntklässlers zur TIMSS/III K10 Aufgabe

¹ Gemeint ist hier der gesamte Beweisprozess sensu Boero (1999, vgl. Brockmann-Behnsen 2012).

² Aus Gründen der besseren Lesbarkeit und Platzökonomie wird der generische Plural benutzt.

einer geeigneten Form, in der Beweise in der Schule notiert werden können, nennt Herbst (2002, S. 285) als Argument für die Verwendung des Zwei-Spalten-Schemas: „[...] it is conceivable that the two-column proving custom – this reduction of mathematical reasoning to its logical, formal dimensions – had developed as a viable way for instruction to meet the demand that every student should be able to do proofs“.

Zwei-Spalten-Beweis

Seit den 1890er Schulreformen soll das Beweisen in U.S-amerikanischen Schulen insbesondere im Geometrieunterricht gelehrt werden, daher hat auch der nicht unumstrittene Zwei-Spalten-Beweis dort eine lange Tradition. Aber auch in den deutschen Bildungsstandards ist das Argumentieren und Beweisen als handlungsorientierte Kompetenz festgeschrieben und im Schulbuch „Mathematik Neue Wege 8“ (Lergenmüller & Schmidt 2007, S.72) wird der Zwei-Spalten-Beweis mit einem Vorgehen in drei Schritten vorgeschlagen: 1. „Klare Trennung von Voraussetzung und Behauptung“ (bzw. Gegebenem und Gesuchtem, Anmerkung des Autors), 2. „Skizzieren einer Beweisfigur“ und 3. schrittweise Herleitung der Behauptung „aus den Voraussetzungen und bereits bekannten Zusammenhängen“. Diese Herleitung wird übersichtlich in zwei nummerierten Spalten notiert. Den Schülern des HeuRekAP Projektes wurde das Zwei-Spalten-Schema vorgestellt und als mögliche Form der Beweisnotation an die Hand gegeben. Abbildung 1 zeigt ein Beispiel für die Anwendung dieses Schemas durch einen am Projekt teilnehmenden Neuntklässler bei der Bearbeitung der TIMSS/III K10 Aufgabe³.

Zwei-Tore-Regel

Eine Besonderheit des HeuRekAP Projektes ist die Einführung der Zwei-Tore-Regel, die im Verlauf der Bearbeitung einer jeden mathematischen (Problem-)Aufgabe bei jedem einzelnen Schritt (Berechnungen, Term- und Äquivalenzumformungen, logische Schlussfolgerungen) beachtet werden muss. Den Schülern wurde verdeutlicht, dass der geplante Schritt mathematisch



Abbildung 2:
Visualisierung der
Zwei-Tore-Regel

³ Bei der TIMSS/III Studie wurde die Aufgabe im Single Choice Format mit vier möglichen Antworten gestellt, bei der hier beschriebenen Untersuchung fehlen die vorgegebenen Antworten.

erst dann legitim durchgeführt werden darf, wenn die Erlaubnis erteilt wurde, **beide** Tore zu passieren. Den Schülern wurde ein Textdokument ausgehändigt, auf dem das genaue Wesen dieser beiden Tore und der dazu gehörigen Wächter erläutert wurde. An beide Tore ist jeweils eine Frage geknüpft, die positiv beantwortet werden muss. Auch hier besteht die Hoffnung darin, dass sich die Schüler im Verlauf des Unterrichtes an die Fragen gewöhnen und sich diese nach einer gewissen Zeit unaufgefordert selbst stellen.

Der Wächter des ersten Tores fragt nach einer **Begründung** für den geplanten Schritt, seine Frage findet sich in ähnlicher Form schon im oben erwähnten Katalog von Pólya, sie lautet hier:

„Warum darfst du das?“

Mögliche Antworten des Schülers an diesen ersten Wächter könnten korrekt angewendete Rechenregeln oder logische Schlussfolgerungen sein. Beim Schlussfolgern wiederum sind als Argumente a) bereits bewiesene Sätze, Axiome etc., b) zuvor begründete Schritte und c) die Voraussetzungen der Aufgabe zulässig.

Der Wächter am zweiten Tor fragt nach dem **Nutzen** des geplanten Schrittes. Seine Frage erinnert an die oben zitierten Fragen von Schoenfeld, hier heißt sie:

„Was bringt es dir?“

Neben offensichtlichen Vorteilen, die der Schüler diesem Wächter nennen könnte, wie beispielsweise, dass ein Term bzw. eine Gleichung durch den Schritt vereinfacht wird, dass man der Lösung durch den Schritt näher kommt, ein neues Teilziel (vgl. König 1992, S. 25) erreicht oder dass der Schritt für die Durchführung des Lösungsplanes erforderlich ist, sind auch die alleinige Hoffnung auf weitere Erkenntnisse für den Lösungsplan oder der Wunsch, diesen (vom ersten Wächter erlaubten) Schritt auszuprobieren, um zu sehen, was passiert, als Argument erlaubt.

Nicht selten kommt es zu Situationen, in denen man einen Schritt durchführen möchte, um ein vorteilhaftes Teilziel zu erreichen, allerdings kennt man kein geeignetes mathematisches Argument zu dessen Erreichung. Man könnte in der Metapher der zwei Tore dem zweiten Wächter eine gute Antwort geben, dem ersten aber nicht, der Schritt bleibt vorerst illegitim.

Zusammenhang zwischen Zwei-Spalten-Beweis und Zwei-Tore-Regel

Bei der Beweisführung an Hand eines Zwei-Spalten-Schemas müssen die Schüler Zeile für Zeile mathematische Schritte aneinander reihen und so

einen Weg von den Voraussetzungen zur Behauptung respektive – im Falle einer Bestimmungsaufgabe – vom Gegebenen zum Gesuchten finden. Die Struktur des Schemas erfordert es, jeden Schritt in eine nummerierte Zeile zu schreiben. In die benachbarte Spalte derselben Zeile wird eine Begründung für die mathematische Legitimität dieses Schrittes eingetragen. Daher ist der erste Wächter der Zwei-Tore-Regel in der Horizontalen einer jeden Zeile des Zwei-Spalten-Beweises zu verorten. Der zweite Wächter ist im Zwei-Spalten-Schema nicht so offensichtlich zu erkennen wie der erste. Weil er aber nach dem Nutzen eines jeden Schrittes fragt, hat er aus größerer Perspektive das Vorankommen des Problembearbeiters auf seinem Lösungsweg im Sinn. Da der Lösungsweg von den Startgrößen (das Gegebene respektive die Voraussetzungen, vgl. König 1992, S. 25) zur Zielgröße (das Gesuchte respektive die Behauptung) führt, ist der zweite Wächter in der Vertikalen des Schemas anzusiedeln.

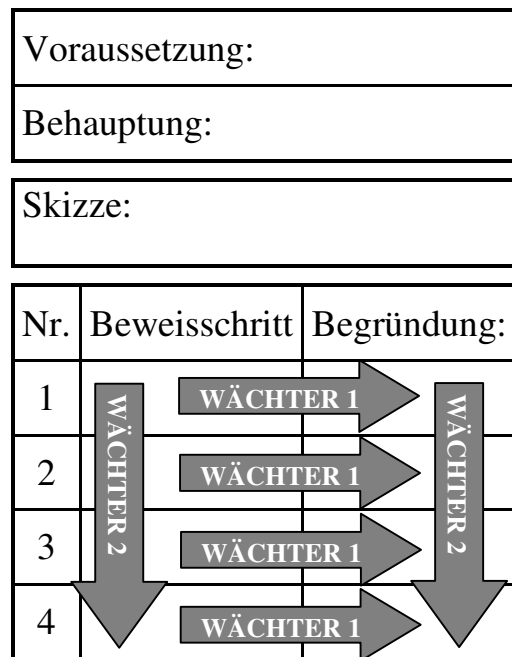


Abbildung 3: Zusammenhang zwischen Zwei-Spalten-Beweis und Zwei-Tore-Regel

Literatur

- Boero, P. (1999): Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematical education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, Juli / August 1999
- Brockmann-Behnsen, D. (2012): HeuRekAP - Erste Ergebnisse der Langzeitstudie zum Problemlösen und Beweisen am Gymnasium, in: Ludwig, M. & Kleine, M. (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012*, Bd 1, Münster, WTM-Verlag, S. 149 - 152
- Herbst, P. (2002): Establishing a Custom of Proving in American School Geometry: Evolution of the Two-Column Proof in the Early Twentieth Century, in: *Educational Studies in Mathematics* **49**: 283–312, 2002, *Kluwer Academic Publishers*.
- König, H. (1992): Einige für den Mathematikunterricht bedeutsame heuristische Vorgehensweisen, in: *Der Mathematikunterricht* Jg. **38**, 3/1992
- Lergenmüller, A. & Schmidt, G. (Hrsg., 2007): *Mathematik Neue Wege 8. Arbeitsbuch für Gymnasien. Niedersachsen*, Braunschweig, Bildungshaus Schulbuchverlag
- Pólya, G. (1949): *Schule des Denkens*, Francke, Tübingen
- Schoenfeld, A. (1992): Learning to think mathematically: Problem solving, Metacognition, and Sense-making in Mathematics, in: Grouws, D. (Hrsg.): *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*, S. 334 – 370, MacMillan, New York