

Bernd BÜCHLER, Paderborn

Verständnis- und Darstellungsschwierigkeiten von Studierenden beim Arbeiten mit Funktionenfolgen in einer mathematischen Anfängervorlesung

Zu Beginn eines mathematisch orientierten Studiums werden Studierende mit diversen mathematischen Begriffen und Konzepten konfrontiert, die sie aus der Schule noch nicht – oder jedenfalls nicht auf dieser Abstraktionsstufe – kennengelernt haben. Dies kann zu Verständnis- und Darstellungsschwierigkeiten führen, was sich insbesondere dann zeigt, wenn die Studierenden z.B. im Rahmen von Übungs- oder Klausuraufgaben mit diesen Begriffen arbeiten und diese im Rahmen von eigenen Beweisen anwenden sollen. Da die im Verlaufe der Vorlesung neu einzuführenden Begriffe oftmals aufeinander aufbauen, sind kombinierte Schwierigkeiten der Studierenden insbesondere mit fortgeschrittenen mathematischen Begriffen zu erwarten. Zu diesen fortgeschrittenen mathematischen Begriffen gehört die Konvergenz von Funktionenfolgen, da diese einerseits das Verständnis der Konvergenz von Zahlenfolgen voraussetzt, andererseits aber auch den Funktionenbegriff beinhaltet – und durch die Unterscheidung zwischen punktweiser und gleichmäßiger Konvergenz zu Verwechslungen führen kann. Da der Umgang der Studierenden mit der Funktionenfolgenkonvergenz in mathematischen Anfängervorlesungen meines Wissens bisher noch nicht im Zentrum hochschuldidaktischer Untersuchungen stand, habe ich hierzu eine Studie durchgeführt, auf die ich nun kurz eingehen möchte.

1. Hintergrund

Die Studie basiert auf der hochschuldidaktischen Begleitung einer Analysis-1-Veranstaltung, die im Wintersemester 2011/12 für Studienanfänger(innen) der Studiengänge Bachelor (Techno-)Mathematik und Gymnasiales Lehramt gehalten wurde. Diese Veranstaltung bestand aus der Vorlesung, den Übungen (es wurden regelmäßig Übungszettel herausgegeben, die von den Studierenden zuhause zu bearbeiten, dann abzugeben waren, und korrigiert und bewertet zurückgegeben wurden – besprochen wurden die Lösungen in einer Zentralübung), den Präsenzübungen (hier waren vor Ort Präsenzaufgaben zu bearbeiten) und der Klausur (am Ende der Veranstaltung). Zur Vorbereitung der Studie führte der Autor eine stoffdidaktische Analyse durch, in der die verschiedenen Konvergenzbegriffe bei Funktionenfolgen, ihre Positionierung und ihr Zweck im Rahmen verschiedener Analysis-Bücher bzw. -Skripte untersucht wurden. Die punktweise und die gleichmäßige Konvergenz wurde im Rahmen der hochschuldidaktisch begleiteten Vorlesung unter Verwendung von Quantoren definiert,

wobei auf den charakteristischen Unterschied in der Abhängigkeit der natürlichen Zahl N ($N = N(\varepsilon, x)$ bei punktwiser Konvergenz und $N = N(\varepsilon)$ bei gleichmäßiger Konvergenz) hingewiesen wurde. Als äquivalentes Kriterium zur Definition der gleichmäßigen Konvergenz wurde ein Satz angegeben (und bewiesen), der die Supremumsnorm verwendet, welche in der Vorlesung hierzu eingeführt wurde.

2. Einordnung in das Forschungsprojekt des Autors

Aus der Literatur sind insbesondere die folgenden Schwierigkeiten mit dem Konvergenzbegriff bei Zahlenfolgen (zusammengestellt von Laura Oststieker im Rahmen ihrer noch abzuschließenden Dissertation über Studierendenschwierigkeiten im Umgang mit Zahlenfolgenkonvergenz) bekannt: Verschiedene Darstellungen von Folgen (Tall & Vinner, 1981), viele Quantoren, Ungleichung und Betrag, umgekehrte Beziehung von ε und N (Davis & Vinner, 1986; Roh, 2005) und die Diskrepanz zwischen Alltagssprache und mathematischer Sprache (Tall & Vinner, 1981). Darüber hinaus sind Beispiele für weitere aus der Literatur bekannte Schwierigkeiten mit mathematischen Begriffen, die im Rahmen von Funktionenfolgen eine Rolle spielen könnten: Funktionen bzw. Abbildungen als mathematische Objekte und der Stetigkeitsbegriff bei Funktionen. Hieraus ergaben sich im Zusammenhang mit Funktionenfolgenkonvergenz a-priori (als Hypothesen) zu erwartende Studierendenschwierigkeiten mit: der Zahlenfolgenkonvergenz, dem Funktionsbegriff bzw. Abbildungsbegriff, den unterschiedlichen Konvergenzbegriffen bei Funktionenfolgen, der Verwendung von Quantoren, der Abgrenzung der Definition der gleichmäßigen Konvergenz vom Stetigkeitsbegriff und dem Zusammenspiel der vorher angegebenen Einzelpunkte. Somit stellten sich dem Autor die folgenden Forschungsfragen. Welche Verständnis- und Darstellungsschwierigkeiten haben Studienanfänger(innen) der Studiengänge Bachelor (Techno-)Mathematik und Gymnasiales Lehramt im Umgang mit Funktionenfolgen – insbesondere mit den zugehörigen Konvergenzbegriffen? Welche besonderen Schwierigkeiten treten bei Funktionenfolgenkonvergenz auf, die über die Schwierigkeiten mit Zahlenfolgen hinausgehen? Wie lassen sich beobachtete Fehler kategorisieren? Wie lässt sich didaktisch möglichen Schwierigkeiten bzw. Fehlvorstellungen vorbeugen? Im Hinblick auf die genannten Forschungsfragen und Hypothesen führte ich also im Wintersemester 2011/12 eine explorative (Vor-)Studie durch. Die Ziele dieser (Vor-)Studie sind: einen Überblick über die auftretenden Studierendenschwierigkeiten im Umgang mit Konvergenz von Funktionenfolgen zu erhalten, die obigen Vorabhypothesen zu überprüfen (soweit wie möglich), Fortschritte im Hinblick auf die Forschungsfragen zu generieren. Zum Design der Studie (bzw. den verwendete-

ten Methoden und Maßnahmen) ist kurz das Folgende zu sagen. Es wurden vom Autor zwei Übungsaufgaben zum Thema Konvergenz von Funktionenfolgen in den Übungsbetrieb eingespeist, die von den Studierenden zuhause zu bearbeiten waren. Darüber hinaus führte der Autor Interviews mit sechs ausgehend von den eingescannten Lösungen ausgewählten Paaren bzw. Einzelpersonen zu ihren abgegebenen Lösungswegen und zum Thema allgemein durch. Die Interviews waren für 60 Minuten konzipiert, dauerten aber (z.T.) deutlich länger. Die Gespräche wurden aufgenommen, zwei Interviews darüber hinaus auch per Video gefilmt. Zunächst sollten die Studierenden die ihnen beim Interview vorliegenden Lösungswege erläutern – es wurden vom Autor Nachfragen gestellt, falls bestimmte Schritte dabei noch nicht klar wurden. Anschließend wurden den Studierenden noch vorbereitete weitere Fragen zum allgemeinen (auch anschaulichen) Verständnis der Thematik gestellt. Zusätzlich zu den Interviews erfolgte noch die Auswertung einer Klausuraufgabe (wurde vom Dozenten gestellt) zum Thema zur Identifikation möglicher Fehlerkategorien. Im Vortrag hat sich der Autor auf die Vorstellung der Auswertung einer Klausuraufgabe zum Thema im Hinblick auf mögliche Fehlerkategorien beschränkt.

3. Analyse einer Klausuraufgabe zum Thema

Es wurde eine einfache vom Dozenten der Veranstaltung gestellte Klausuraufgabe zur Konvergenz von Funktionenfolgen ausgewertet, in der die durch $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (\cos x)/n$ gegebene Funktionenfolge auf gleichmäßige und punktweise Konvergenz zu überprüfen war. Der Autor erstellte zu dieser Aufgabe verschiedene mögliche Lösungswege (z.B. unter Verwendung der Definition der gleichmäßigen Konvergenz mit Quantoren und – alternativ dazu – unter Verwendung der Supremumsnorm), um sich einen Überblick über mögliche zu erwartende Schritte und interessante Punkte in den Lösungswegen zu verschaffen.

4. Fehlerkategoriensystem

Die Grundlage zur Entwicklung eines Fehlerkategoriensystems bildeten 97 eingescannte Klausurlösungen. Von diesen wurden 13 besonders exemplarische Klausuren im Hinblick auf die Bearbeitung der obigen Klausuraufgabe zur Konvergenz von Funktionenfolgen ausgewählt. Darauf basierend wurde ein Fehlerkategoriensystem entwickelt. Das Fehlerkategoriensystem wurde dann noch an weiteren vorliegenden Klausurlösungen überprüft und ergänzt. Bei der Erstellung des Fehlerkategoriensystems wurden allgemeine Fehlerkategorien (adaptiert auf der Grundlage eines Systems von Laura Ostsieker zur Zahlenfolgenkonvergenz) – also: Fehlende Begründung im Verhältnis zu vermittelten Bezugsnormen, Mängel beim Umformen sym-

bolischer Ausdrücke, Unvollständige formale Aussagen, Logische Probleme, Umformen der Behauptung mit mangelnder Kommentierung, n - N -Problem und Fehlerhafte Folgennotation – von speziell im Umgang mit Funktionenfolgen auftretenden Fehlerkategorien unterschieden. Diese sind (mit ihren Instanzen): Mangelnde Unterscheidung zwischen gleichmäßiger und punktw. Konvergenz (N - ε - x -Problem, Verwendung der Supremumsnorm zum Nachweis der pktw. Konvergenz, Spezifische Probleme mit der Verwendung von Quantoren), Problem bei der formalen Darstellung von Funktionen als Objekte (Mangelnde formale Unterscheidung zwischen Funktion und Funktionswert, Probleme bei der Verwendung des Zuordnungspfeils, Verwendung des Betrags für Funktionen), Probleme bei der Verwendung der Supremumsnorm (Fehlende Bezugsmenge oder Verwechslung des Symbols X für die Bezugsmenge mit der Variablen x , Mangelnde Konkretisierung der Bezugsmenge) und Falsche Wahl der Grenzfunktion. Im Vortrag wurden diese kurz an Beispielen aus den eingescannten Studierendenlösungen erläutert. Danach folgte noch eine exemplarische Anwendung der codierten Fehlerkategorien auf eine (vollständige) Studierendenlösung.

4. Ausblick

Es ist geplant, die obigen Fehlerkategorien aus der (Vor-)Studie ausführlicher in naher Zukunft – mit Definitionen und erläuternden Beispielen – in einer Veröffentlichung darzustellen, zusammen mit exemplarischen Anwendungen auf vollständige Studierendenlösungen. Diese sollen ergänzt werden durch Ergebnisse bzw. Erkenntnisse aus den oben angesprochenen Interviews und ausgewerteten Studierendenlösungen der beiden Übungsaufgaben, die das Studierendenverständnis der gleichmäßigen und punktw. Konvergenz – nicht nur fehlerorientiert – vermutlich noch besser beleuchten. Hierbei sollen nicht nur formale Aspekte, wie z.B. die formal richtige Verwendung von Quantoren, im Mittelpunkt stehen, sondern das allgemeine Verständnis der entsprechenden mathematischen Begriffe.

Literatur

- Davis, R. B. & Vinner, S. (1986): The Notion of Limit: Some Seemingly Unavoidable Misconception Stages. In: *The Journal of Mathematical Behavior*, 5, 281 - 303.
- Roh, K. H. (2005): College Students' Intuitive Understanding of the Concept of Limit and their Level of Reverse Thinking. Doktorarbeit, The Ohio State University, Columbus, OH.
- Tall, D. O. & Vinner, S. (1981): Concept Image and Concept Definition in Mathematics, with Particular Reference to Limits and Continuity. In: *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151 - 169.