Stefan FRIEDENBERG, Bettina RÖSKEN-WINTER, Bochum

Strategien zur Lösung mathematikhaltiger Aufgaben der Technischen Mechanik

1. Sachstand

Studierende der Ingenieurwissenschaften erwerben mathematische Kompetenzen in ihrem Studium in zwei Kontexten: in der "Höheren Mathematik für Ingenieure" und situiert in Lehrveranstaltungen ihres Faches, insbesondere im Rahmen theoriehaltiger Lehrveranstaltungen wie der "Technischen Mechanik". In höheren Semestern wird von den Studierenden erwartet, dass sie diese Kompetenzen integrieren und in ingenieurwissenschaftlichen Problemlösungen anwenden können. Die Asynchronität mathematischer und ingenieurwissenschaftlicher Ausbildung wird seit Langem beklagt, ebenso die mangelnde Anschlussfähigkeit des in den Mathematikvorlesungen erworbenen Wissens. Hohe Abbrecherquoten beruhen nicht zuletzt auf dem Scheitern in den Mathematikvorlesungen und den mathematikhaltigen Lehrveranstaltungen der Ingenieurwissenschaft im ersten Studienjahr (Heublein, Schmelzer & Sommer, 2008). Des Weiteren benennen Studierende Motivationsprobleme in den Mathematikvorlesungen, weil der Bezug zum ingenieurwissenschaftlichen Studium nicht hinreichend sichtbar ist (Griese, Glasmachers, Kallweit & Rösken, 2011). Derzeit liegen weder umfassende Kompetenzmodelle noch Kompetenzerfassungs oder -messinstrumente für die Anwendung von Mathematik im Ingenieurskontext vor. Wenige Arbeiten beschreiben auf genereller Basis die mathematischen Kompetenzen der Ingenieursstudierenden (vgl. Mustoe & Lawson, 2002).

Das BMBF-geförderte Projekt KoM@ING untersucht Kompetenzen von Studierenden bei der Anwendung von Mathematik in ingenieurswissenschaftlichen Fächern. Am Beispiel konkreter Studierendenbearbeitungen typischer Aufgabenstellungen der Grundvorlesungen werden mögliche und tatsächliche Strategien der Bearbeitung aufgezeigt und analysiert. Hierbei wird ein besonderes Augenmerk auf die in den mathematischen Grundlagenvorlesungen und auch bereits in der Schule vermittelten mathematischen Problemlösefähigkeiten gelegt.

2. Kompetenzmodell und didaktische Ansätze

Grundsätzlich gehen wir von einem zweidimensionalen Kompetenzmodell aus, welches zwischen einer Wissens- und einer Prozesskomponente unterscheidet. Während in der Wissenskomponente deklaratives und prozedurales Wissen kombiniert mit technischen Fertigkeiten wie dem Ausführen von Lösungsalgorithmen verortet sind, stehen in der Prozesskomponente das Modellieren, Argumentieren, Reflektieren und Problemlösen im Vordergrund. Schnell wird jedoch bei der Aufgabenanalyse ersichtlich, dass ein Modellieren im Sinne des Modellierungskreislaufs (vgl. Blum & Leiß, 2006) keine Anwendung finden kann. Aufgabenkontexte sind keine Realsituationen, sondern entspringen der Metaebene „Technische Mechanik". Dabei werden oft starke Vereinfachungen vorgenommen, welche dann gewissermaßen „Einkleidungen" für die Aufgabeninhalte bereitstellen. Daher legen wir das Hauptaugenmerk unserer Untersuchungen auf das Problemlösen, welches auch im „Modulhandbuch Maschinenbau" als bedeutender Aspekt ausgewiesen ist: „Im Modul Mathematik steht das Anwenden mathematischer Methoden zur Lösung ingenieurwissenschaftlicher Probleme im Vordergrund". Für die didaktische Analyse der Aufgaben und ihrer Bearbeitungen greifen wir auf die Phasen des Problemlösens nach Polya (1949) und insbesondere die heuristischen Prinzipien, Strategien und Hilfsmittel des Vorgehens beim Problemlösen nach Bruder und Collet (2011) zurück.

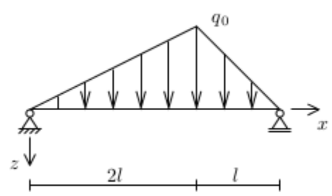
3. Beispielaufgabe

Aufgabe 4.4:

Ein Balken der Länge $3l$ wird wie skizziert durch eine Streckenlast $q(x)$ belastet. Bestimmen Sie Größe und Angriffspunkt der aus $q(x)$ resultierenden Kraft R.

geg: l, q_0.

Lösung: $R = \frac{3}{2} q_0 l, \quad x_R = \frac{5}{3} l$



Einerseits kann zur Lösung der Aufgabe auf die Definitionen von Schwerpunkt und gesamt resultierender Kraft aus der zugehörigen Vorlesung „Mechanik A" zurückgegriffen werden. In diesem Fall wird die angegeben Linienlast als stückweise lineare Funktion interpretiert und anschließend integriert, um die resultierende Kraft zu berechnen. Eine weitere Integralbeziehung liefert dann die zum Schwerpunkt gehörenden Koordinaten. Alternativ kann die Linienlast jedoch auch in zwei Teillasten aufgeteilt werden. Der jeweilige Schwerpunkt kann berechnet werden, indem man sich an die elementaren Eigenschaften der Seitenhalbierenden des Dreiecks erinnert: diese schneiden sich nämlich im Schwerpunkt und teilen einander im Verhältnis 2:1. So ergibt sich für die Schwerpunktskoordinaten des ersten Dreiecks ein x-Wert von 4/3l, für die des zweiten 7/3l. Aufgrund der doppelten Gewichtung des ersten Dreiecks (2l vs. l) liegt der Gesamtschwerpunkt damit bei $x_R = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot \frac{4}{3} l + \frac{7}{3} l) = \frac{5}{3} l$. Die beiden Lösungsvarianten weisen auf deutlich unterschiedliches Vorgehen aus eher mathematischer oder ingenieurwissenschaftlicher Sicht hin. Um den Schwierigkeitsgrad dieser Aufgabe zu bestimmen, orientieren wir uns an den Einstufungen der Aufgabenkomplexität nach Bruder (2006).

Formalisierungsgrad F: Der Aufwand zur Mathematisierung ist insgesamt eher gering: Die gegebene Darstellung suggeriert bereits ein geeignetes Koordinatensystem, Angabe und Lage der Größen in der Abbildung unterstützen die Mathematisierung. Kategorie: niedrig (1)

Komplexitätsgrad K: Alle Lösungsschritte sind auf bekannte Grundaufgabe zurückzuführen. Die Anzahl der Lösungsschritte (und insbesondere die Verknüpfung von Lösungsschritten stark variierender Aktualität, s.u.) machen jedoch auch ein geringes Maß an Planung (vgl. *vorwärts/rückwärts arbeiten*) erforderlich; dabei hilft, dass eine in Teil (b) benötigte Größe in Teil (a) berechnet werden muss. Kategorie: mittel (2)

Bekanntheitsgrad B: Alle Lösungsschritte sind auf bekannte Grundaufgabe zurückzuführen. Die Anzahl der Lösungsschritte (und insbesondere die Verknüpfung von Lösungsschritten stark variierender Aktualität, s.u.) machen jedoch auch ein geringes Maß an Planung (vgl. *vorwärts/rückwärts arbeiten*) erforderlich. Kategorie: mittel (2)

Ausführungsgrad A: Der Rechenaufwand ist eher gering und durchschnittlich fehleranfällig (Verwendung von Bruchtermen sowie der Integralschreibweise). Kategorie: niedrig (1)

Die Aufgabenkomplexität wird insgesamt als niedrig (bis mittel) bei einer Dominanz von F eingeschätzt. Nachstehend analysieren wir die Aufgabenbearbeitung einer Gruppe von drei Studierenden.

4. Studentisches Vorgehen

Die Problemlösephasen *„1. Verstehen der Aufgabe“* und *„2. Ausdenken eines Plans“* werden zunächst eher vernachlässigt; die Studenten steigen recht zügig in die Aufgabe ein und erarbeiten sich ihr Verständnis der Situation bei den ersten Berechnungen (*Vorwärtsarbeiten* setzt keine klaren Zielvorgaben/-vorstellungen voraus, führt hier aber durchaus zu richtigen Teillösungen). Erst wenn Probleme auftreten oder erste Ergebnisse zur

Diskussion stehen, werden das Verständnis der Aufgabe und die eigene Herangehensweise reflektiert. Ein Verständnis des Problems wird nun gemeinsam aufgebaut, wobei die schriftliche Aufgabestellung (insbesondere der konkrete Arbeitsauftrag) erst spät (nach 20 Minuten) eingebracht wird. Nach vielfachem Probieren erfolgt die Phase *„2. Ausdenken eines Plans“* durch einen Analogieschluss (nach 24 Minuten). Die *heuristischen Strategien* nach Bruder und Collet (2011) kommen in der Gruppe alle zum Einsatz. Insbesondere das *systematische Probieren* mit Vorwissen (*Rückführung*) unter Verwendung gegebener Größen (*Vorwärtsarbeiten*) findet schnell Verwendung; der *Analogieschluss* ist ausschlaggebend für das *„2. Ausdenken eines Plans“*. *Heuristische Hilfsmittel* werden angemessen verwendet (Formeln als *Gleichungen*, Skizzen als *informative Figuren*, Skript und Mitschriften als *Wissensspeicher*). Verwendete *heuristische Prinzipien* sind insbesondere das *Zerlegungsprinzip/-Ergänzungsprinzip* sowie das *Invarianzprinzip* beim Analogieschluss (und das *Symmetrieprinzip* beim Verstehen der Aufgabensituation). Die Analyse der Aufgabenbearbeitung zeigt die Bedeutung des Problemlösens beim Anwenden von Mathematik im Ingenieurskontext. Weitere Aufgabenanalysen auch normativ schwierigerer Aufgaben dienen der weiteren Erfassung von Kompetenzfacetten zur Aufklärung von Zusammenhängen.

Literatur

Bruder, R. (2006). Grundlagen für Analogieschlüsse: Mathematisierungsmuster und Vorgehensstrategien in Anwendungssituationen. *Der Mathematikunterricht 52*(6), 5-18.

Bruder, R. & Collet, C. (2011). *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Griese, B., Glasmachers, E., Kallweit, M., Rösken-Winter, B. (2011): Mathematik als Eingangshürde in den Ingenieurwissenschaften. In Beiträge zum Mathematikunterricht.

Heublein, U., Schmelzer, R. & Sommer, D. (2008). *Die Entwicklung der Studienabbruchquote an den deutschen Hochschulen: Ergebnisse einer Berechnung des Studienabbruchs auf der Basis des Absolventenjahrgangs 2006.* HIS Projektbericht. Hannover: Hochschul-Informations-System.

Leiß, D., & Blum, W. (2006). Beschreibung zentraler mathematischer Kompetenzen. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung, & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret* (S. 33 - 50). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Mustoe, L. & Lawson, D. (2002). Mathematics for the European Engineer. A Curriculum for the Twenty-First Century. A Report by the SEFI Mathematics Working Group. Brussels: SEFI, 2002.

Polya, G. (1949). *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme.* Tübingen und Basel: Francke.