Sabrina HEIDERICH, Dortmund

Von der Situation zur elementaren Funktion – wie Merksätze den Blick verkürzen

Der Beitrag befasst sich einerseits mit der Frage, inwiefern es Schülerinnen und Schülern gelingt ihr mathematisches Wissen zu den proportionalen, linearen und antiproportionalen Funktionen auf andere Kontexte anzuwenden und welche Hürden ggf. auftreten, um andererseits Rückschlüsse auf Lerngegenstände zu ziehen, mit denen ein angemessener Transfer gelingen kann.

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass nicht selten reduktionistische Merksätze zu Rate gezogen, die sich aber nicht immer als tragfähig erweisen. Einerseits ermöglichen sie durch ihre kurze, prägnante Form einen schnellen Zugang zur vorliegenden Situation, andererseits erfassen sie aber nur einen sehr eingeschränkten und unvollständigen Bereich der Eigenschaften der einzelnen Funktionstypen und lassen damit keine eindeutige Identifikation der Situation zu.

1. Charakteristika des Lerngegenstands

Die Grundvorstellungen zum funktionalen Denken *Zuordnung*, *Kovariation* und *Funktion als Ganzes* (vgl. Vollrath, 1989, 7ff, Malle, 2000, 8f) bilden die Gelenkstelle zwischen der Realsituation und dem mathematischen Modell. Als Perspektive auf die Situationen und zur Erschließung können die Darstellungen *Tabelle*, *Graph* und *Term* zurate gezogen werden. Jede für sich gibt jedoch nur Teilaspekte der Funktion wieder (vgl. z.B. Gagatsis & Shiakally, 2004, 648), so dass eine Arbeit mit verschiedenen Repräsentationen und ihren Übersetzungen im Rahmen von Lernumgebungen notwendig ist (vgl. Stölting, 2008, 70). Insbesondere das Wissen um die Vorzüge der einzelnen Darstellungen unterstützt eine adäquate Wahl bei der Situationsanalyse (a.a.O., 61ff). Darüber hinaus ist das Wissen um die besonderen Eigenschaften der einzelnen, elementaren Funktionen unabdingbar, um das Verhalten der abhängigen Größen der vorliegenden Situation als Charakteristikum eines bestimmten, mathematischen Modells zu identifizieren. Die proportionalen Funktionen zeichnen sich durch die Existenz des Startwerts im Ursprung und eine gleichmäßigen Steigung der abhängigen Größen aus. Sie können als Spezialfall oder Teilmenge von linearen Funktionen gesehen werden, bei denen der Startwert ungleich Null sein kann. Jedoch verliert die lineare im Vergleich zur proportionalen Funktion dadurch die Eigenschaft der Quotientengleichheit und damit die Möglichkeit einer gleichsinnigen, multiplikativen Kovariation der Größen. Erhalten bleibt jedoch das gleichbleibende, schrittweise Verhalten. Die antiproportionalen Funktionen sind dagegen durch die Produktgleichheit der abhängigen Größen gekennzeichnet. Ein gegensinniges additives Vorgehen ist hier nicht möglich. Eine weitere Konkretisierung dieser eigenständigen Merkmale auf die verschiedenen Darstellungen eröffnet die Komplexität dieses Feldes und damit die Spannbreite zur Differenzierung.

2. Designexperimente

Die erste Runde von Designexperimenten wurde in das Projekt KOSIMA (vgl. Barzel et al., 2011) eingebettet. Im Rahmen der Lernumgebung „Mit Funktionen Voraussagen machen und weitere Werte bestimmen“ (Jgst. 8) haben die Schülerinnen und Schüler zunächst eigenständig proportionale, lineare und antiproportionale Funktionen im Kontext der Routenplanung anhand variierender Abhängigkeiten zwischen den Größen Zeit, Strecke, Reststrecke und Geschwindigkeit in den verschiedenen Darstellungen und ihren Übersetzungen erprobt und anschließend systematisiert. Zeitlich anknüpfend wurden acht Schülerpaare in klinischen Interviews mit neuen Kontexten in Form von Bildern und kurzen Textaufgaben konfrontiert. Ebenfalls wurden elf Schülerpaare außerhalb des Projekts interviewt.
Ziel der Designexperimente ist die systematische Analyse von individuellen Vorstellungen zu charakterisierenden Eigenschaften und Darstellungen von elementaren, funktionalen Zusammenhängen und deren Verwendung zur Differenzierung der Funktionstypen.

3. Analyse und Ergebnisse

Für die Analyse wurde das Zusammenspiel aus Fokussierungen (als Kategorien, mathematische Objekte und Eigenschaften, die während der Aufgabenbearbeitung besonders in den Blick genommen und zur weiteren Argumentation genutzt werden) und Festlegungen (als für wahr gehaltene Einschätzungen zu Eigenschaften und Zusammenhängen der mathematischen Objekte zur Charakterisierung der Situation; vgl. Hußmann & Schacht, 2009) seitens der Schülerinnen und Schüler herausgearbeitet. Die Betrachtung individueller Festlegungen und Fokussierungen ermöglicht eine Analyse des inhaltlichen Verständnisses seitens der Probandinnen und Probanden und somit individueller Hürden, was eine Verbesserung des Lerngegenstands im Rahmen fachdidaktischer Entwicklungsforschung (vgl. Prediger et al., 2012) begünstigt.

Besonders auffällig zeigte sich das Phänomen der Priorisierung folgender Merksätze in Form stark verkürzter, memorierbarer Versprachlichungen: *Je mehr, desto mehr* oder *je weniger, desto weniger* steht für *proportionale* Zusammenhänge; *Je mehr, desto weniger* oder *je weniger, desto mehr* steht für *antiproportionale* Zusammenhänge. Bei der Situationsidentifizierung richten diese den Fokus nur auf einen äußerst unkonkreten Ausschnitt des Wachstumsverhaltens der abhängigen Größen. Schon im elementaren Bereich, bei den negativen linearen Funktionen, führt die zweite Festlegung zu Fehlinterpretationen. Ein weiteres zentrales Phänomen tritt beim konsequenten Einhalten der eingegangenen *Erst*festlegung „Da die Größen je mehr, desto weniger variieren, ist die Situation antiproportional" auf. Diese Aussage bleibt auch bei gegengleich additiv variierenden Größen in der Tabelle und dem Graphen einer Geraden mit negativer Steigung weiter tragfähig, wobei jedoch nicht zwangsläufig eine antiproportionale Funktion damit charakterisiert wird. Demnach müssen eingegangene und zur Entscheidung verwendete Festlegungen mehr beinhalten als die obigen es leisten. Sie müssen *vollständig* sein und zwar in dem Sinn, dass sie einerseits einen hinreichenden Zugang zu einer bestimmten Klasse funktionaler Situationen ermöglichen und andererseits die Reichweite des mathematischen Modells in seiner Gänze erfassen.

Darüber hinaus müssen Festlegungen zu den einzelnen Funktionstypen *widerspruchsfrei* sein. Die Bearbeitung in Abb. 1 stammt von einem Schüler, der zu dem Bild einer Kerze die Größen „Brenndauer" und „noch vorhandene Höhe" in Beziehung setzt, indem er zunächst die ersten vier Wertepaare in die Tabelle schreibt, das zweite bis vierte Wertepaar als Punkte im Koordinatensystem einordnet und schließlich das letzte Wertepaar in der Tabelle und für den Graphen als Punkt ergänzt. In der Tabelle fokussiert er zunächst auf einen Startwert bei 20 (was für Linearität spricht) und legt sich auf eine Brenndauer von 2 Stunden bei 10 cm Abnahme der Kerze bzw. Halbierung der Kerzenhöhe fest. Dann ändert er jedoch sein Vorgehen, indem er sich vom zweiten bis vierten Wertepaar auf eine gegensinnige multiplikative Strategie festlegt (was für Antiproportionalität spricht). Andere Bearbeitungen des Schülers zeigen seine Priorisierung der oben genannten Je-desto-Festlegungen. Denkbar ist der implizite Schluss auf Antiproportionalität durch das Je-mehr-desto-weniger-Verhalten der Größen in der Tabelle und eine Assoziierung des antiproportionalen Zusammenhangs mit der multiplikativen Strategie in der Tabelle. Bei der Übertragung des zweiten bis vierten Wertepaars als Punkte im Graphen zeigt seine Äußerung „Der Graph ist mir jetzt nicht so gelungen", dass die entstehende Gestalt nicht seiner Erwartung entspricht. Die anschließende Ergänzung des fünften Wertepaars (dabei erläutert er sein Vorgehen) in der Tabelle durch die Halbierung der Addition aus 10 und 5

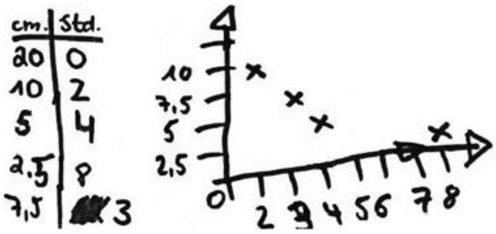

Abb.1: Schülerbearbeitung

(7,5) und für den y-Wert entsprechend durch die Halbierung der Addition aus 2 und 4 (3) macht seine implizite Festlegung deutlich, die Verdopplungs-/ Halbierungsstrategie von einzelnen Werten auf Intervalle zu übertragen und eine Gerade zur Situation erzeugen zu wollen. Abschließend zeichnet er den neuen Punkt in das Koordinatensystem ein. In beiden Darstellungsformen nutzt der Schüler Festlegungen, die sich sowohl auf lineare als auch antiproportionale Merkmale und Strategien stützen, so dass er keine gelingende Identifizierung der Situation vornehmen kann.

Die folgende Festlegung beschreibt beispielhaft den Kernaspekt des Begriffs der Linearität bzgl. der Kovariations-Vorstellung: *Bei einer linearen Funktion kommt pro Schritt immer dasselbe dazu oder wird weniger* (Hußmann et al., 2015). Ziel von Lernumgebungen muss es sein derartige Festlegungen bei den Lernenden zu verankern, die geeignete(!) Bindeglieder zwischen Realsituationen und dem mathematischen Modell repräsentieren, die eine Ausdifferenzierung der Grundvorstellungen hinsichtlich des konkreten, mathematischen Modells bereitstellen, bzgl. der Darstellungen evident und vor allem vollständig hinsichtlich der Gültigkeit sind.

Literatur

Barzel, B., Prediger, S., Leuders, T., Hußmann, S. (2011): Kontexte und Kernprozesse – Aspekte eines theoriegeleiteten und praxiserprobten Schulbuchkonzepts. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2011. Münster: WTM, 71-74.

Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004): Translation ability from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. In: Educational Psychology, 24(5), 645-657.

Hußmann, S., Schacht, F. (2009): Ein inferentialistischer Zugang zur Analyse von Begriffsbildungsprozessen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2009. Münster: WTM, 339-342.

Hußmann, S., Mühlenfeld, U., Witzmann, C. (2015): Voraussagen mit dem Routenplaner – Mit Funktionen modellieren. Erscheint in: B. Barzel, S. Hußmann, T. Leuders, S. Prediger (Hrsg.): mathewerkstatt. Klasse 8. Berlin: Cornelsen

Malle, G. (2000): Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. In: Mathematik lehren, 103, 8-11.

Prediger, S., Link, M., Hinz, R., Hußmann, S., Thiele, J. & Ralle, B. (2012): Lehr-Lernprozesse initiieren und erforschen - Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. In: Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Unterricht, 65(8), 452–457.

Stölting, P. (2008): Die Entwicklung funktionalen Denkens in der Sekundarstufe I - Vergleichende Analysen und empirische Studien zum Mathematikunterricht in Deutschland und Frankreich. Dissertation, Universität Regensburg

Vollrath, H.-J. (1989): Funktionales Denken. In: JMD, (10)1, 3-37.