Martin Erik HORN, Berlin

Zur Beziehung zwischen inneren und äußeren Produkten in der Geometrischen Algebra

Die Geometrische Algebra ist eine mathematische Sprache, die bei Problemstellungen gleichzeitig algebraische und geometrische Zugänge eröffnen. Nicht nur in der Physik kann sie deshalb als wirkungsvolles mathematisches Instrument (Hestenes 2003 & Parra Serra 2009) eingesetzt werden.

1. Zugang zur Geometrischen Algebra

Eine der einfachsten Zugänge zur Geometrischen Algebra besteht nach Parra Serra darin, geometrische Objekte als reelle Linearkombinationen der geometrischen Basisgrößen (also der Basisvektoren) und ihrer Geometrischen Produkte aufzufassen. Die einzigen wesentlichen Regeln, die es dann zu verinnerlichen gilt, sind: Unterschiedliche orthogonale Basisvektoren vertauschen anti-kommutativ und Basisvektoren sind normiert (Parra Serra 2009, S. 823). Sie quadrieren somit zu +1 (raumartige Basisvektoren), –1 (zeitartige Basisvektoren) und im Spezialfall lichtartiger Basisvektoren zu 0.

Die Geometrische Algebra verknüpft dabei geometrische Größen (Basisvektoren, die im dreidimensionalen Fall durch Pauli-Matrizen repräsentiert werden können) auf eine algebraisch eindeutige Art und Weise. Dieser gleichzeitig geometrische wie auch algebraische Rahmen stellt das konzeptuelle Grundgerüst der Geometrischen Algebra dar und ist einer der wesentlichen Gründe für ihre hohe didaktische Wirksamkeit (Hestenes 2003).

Der Zugang über die Diskussion von Linearkombinationen unterschiedlicher Basisgrößen ist jedoch auch erkenntnistheoretisch interessant, betrachtet er denn geometrische Objekte als Zusammensetzung von Bausteinen.

2. Zerlegung und Zusammenfügung

Aus welchen Bestandteilen besteht ein zusammengesetztes Komposit? Diese zentrale Frage umschreibt die Motivation eines großen Bereichs wissenschaftlichen Handelns. Ein Komposit in Form eines Objektes, einer anderen strukturellen Gegebenheit oder eines mathematischen Konstrukts verstehen wir wissenschaftlich nicht allein dadurch, dass wir es phänomenologisch rein auf die Oberflächenstruktur beschränkt als Ganzes beschreiben.

Wir verstehen ein solches Komposit erst dann richtig, wenn wir es in seiner funktionalen Wirkung auf andere vorhandene Strukturen (der mathematischen oder physikalischen Welt, in der sich das Komposit befindet) durchschauen. Ein solches funktionales Verständnis setzt aber voraus, dass wir das Komposit hinsichtlich seiner Bestandteile, die wir in einer Analyse auffinden (siehe Abb. 1) und die gänzlich unterschiedlich auf andere Strukturen wirken können, verstehen.

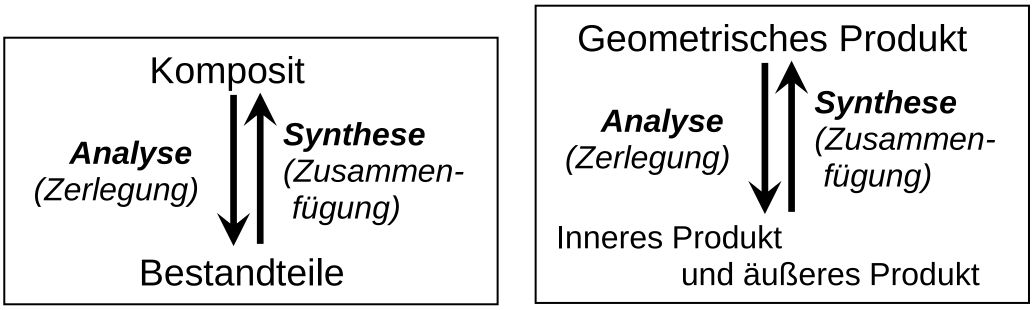

Abb.1: Analyse und Synthese eines zusammengesetzten Komposits.

Eine solche Analyse spiegelt sich im umgekehrt wider in der Synthese der Einzelteile zu einem Ganzen. Dies wird im Folgenden am Beispiel des Geometrischen Produktes von Vektoren im dreidimensionalen Raum gezeigt.

3. Zerlegung des Geometrischen Produktes

Das Geometrische Produkt zweier Vektoren $r_1 = x_1\sigma_x + y_1\sigma_y + z_1\sigma_z$ und $r_2 = x_2\sigma_x + y_2\sigma_y + z_2\sigma_z$ des dreidimensionalen Raums kann in kanonischer Form (Hestenes 2003, S. 107) in inneres und äußeres Produkt zerlegt werden, wobei zwei dimensionsunterschiedliche Teile entstehen:

$$\begin{aligned} r_1 r_2 &= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \\ &\quad + (x_1y_2 - x_2y_1)\,\sigma_x\sigma_y + (y_1z_2 - y_2z_1)\,\sigma_y\sigma_z + (z_1x_2 - x_2z_1)\,\sigma_z\sigma_x \\ &= r_1 \bullet r_2 + r_1 \wedge r_2 \end{aligned}$$

Der erste Teil des Geometrischen Produktes r_1r_2 ist ein Skalar und damit dimensionslos. Er kann als inneres Produkt $r_1 \bullet r_2$ interpretiert werden, das dimensionsreduzierend agiert. Der zweite Teil von r_1r_2 umfasst die dimensionshöheren Terme in Form von Bivektoren und wird als äußeres Produkt $r_1 \wedge r_2$ interpretiert.

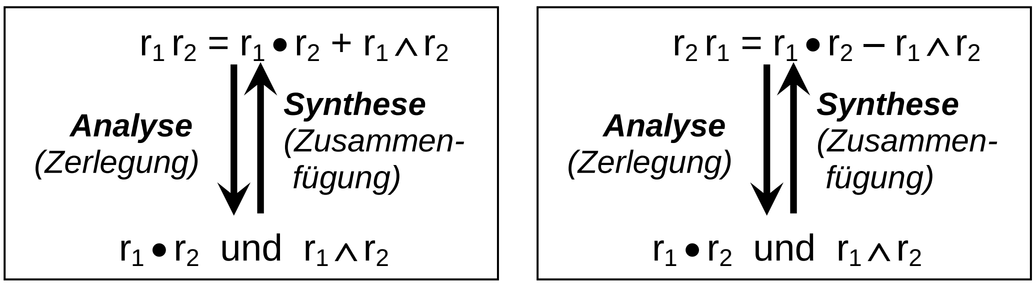

Abb.2: Zwei Synthesemöglichkeiten von innerem und äußerem Produkt.

Fazit: Das Geometrische Produkt enthält $r_1 \bullet r_2$ und $r_1 \wedge r_2$ als Bestandteile.

4. Zerlegung von innerem und äußerem Produkt

Doch was passiert, wenn wir versuchen, in einem nächsten Schritt das innere und das äußere Produkt zu zerlegen, um die Bestandteile des Geometrischen Produktes weiter auszudifferenzieren? Um dies zu bewerkstelligen, muss neben der bisher gewählten Analysestrategie (in Abschnitt 3 zum Beispiel eine Aufspaltung hinsichtlich des Dimensionsverhaltens) eine erweiterte Charakterisierung beispielsweise hinsichtlich des Vertauschungsverhaltens gefunden werden (siehe Abb. 3).

$$r_1 \bullet r_2 = \frac{1}{2} r_1 r_2 + \frac{1}{2} r_2 r_1$$

Analyse (Zerlegung) $\downarrow\uparrow$ **Synthese** (Zusammenfügung)

$r_1 r_2$ und $r_2 r_1$

$$r_1 \wedge r_2 = \frac{1}{2} r_1 r_2 - \frac{1}{2} r_2 r_1$$

Analyse (Zerlegung) $\downarrow\uparrow$ **Synthese** (Zusammenfügung)

$r_1 r_2$ und $r_2 r_1$

Abb.3: Analyse von innerem und äußerem Produkt.

Diese erneute Analyse zeigt: Das Geometrische Produkt setzt sich nicht nur aus innerem und äußerem Produkt zusammen. Mit der gleichen Berechtigung kann gesagt werden, dass sich das innere oder das äußere Produkt aus zwei Geometrischen Produkten zusammensetzt.

Es ist ein erkenntnistheoretisch faszinierendes Artefakt der Mathematik: wir können nicht sagen, was Einzelteil und was Komposit ist. Alles scheint in allem enthalten. Und auch für die Physik hat diese Erkenntnis fatale Konsequenzen. Nach der „Machtübernahme der Mathematik in der Quantentheorie“ (v. Weizsäcker 1994, S. 511) mag auch aus mathematischen Gründen nicht explizit erfassbar sein, was Komposit oder Bestandteil ist.

5. Eine Mathematik ohne negative Zahlen

Ist die Mathematik eine freie Erfindung des menschlichen Geistes (Poincaré 1904)? Um diese und ähnliche Fragen wird gerade auch im didaktischen Bereich „most furiously“ (Hellman 2006, Kap. 10, S. 211) gestritten. Zumindest im Bereich der Zerlegung mathematischer Konstrukte scheint eine eindeutig subjektive (und damit kreativ-erfindende) Komponente enthalten zu sein: Um das Geometrische Produkt zu zerlegen, addieren wir schlichtweg Null, die wir frei wählen können und frei wählen müssen:

$$r_1 r_2 = r_1 r_2 + 0 = r_1 r_2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) r_2 r_1 = r_1 r_2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} e_{12} + \frac{1}{3} e_{21}\right) r_2 r_1$$

Die Möglichkeit einer beliebigen Ausgestaltung der Null gestattet es, andere mathematische Setzungen zu wählen. Beispielsweise kann die Mathematik der S_3-Permutationsalgebra (Horn 2012a & b) genutzt werden, um eine Dreifach-Zerlegung des Geometrischen Produktes zu generieren (siehe rechter Teil der vorigen Formel). Dabei wird r_1r_2 in ein modifiziertes inneres Produkt $r_1 \bullet r_2 = ⅓(r_1r_2 + r_2r_1)$ und zwei verschiedene äußere Produkte $r_1 \wedge_{12} r_2 = ⅓(r_1r_2 + e_{12}\, r_2r_1)$ sowie $r_1 \wedge_{21} r_2 = ⅓(r_1r_2 + e_{21}\, r_2r_1)$ aufgespaltet.

Diese alternative Aufspaltung mag künstlich erscheinen, zumal der philosophische Ansatz, diese Ausgestaltung als eine Mathematik ohne negative Größen aufzufassen, nicht jedem gefallen wird. Aus physikalischer Sicht jedoch bietet eine solche alternative Geometrische Algebra eine effektive Möglichkeit, dreiwertige geometrische Situationen wie beispielsweise die

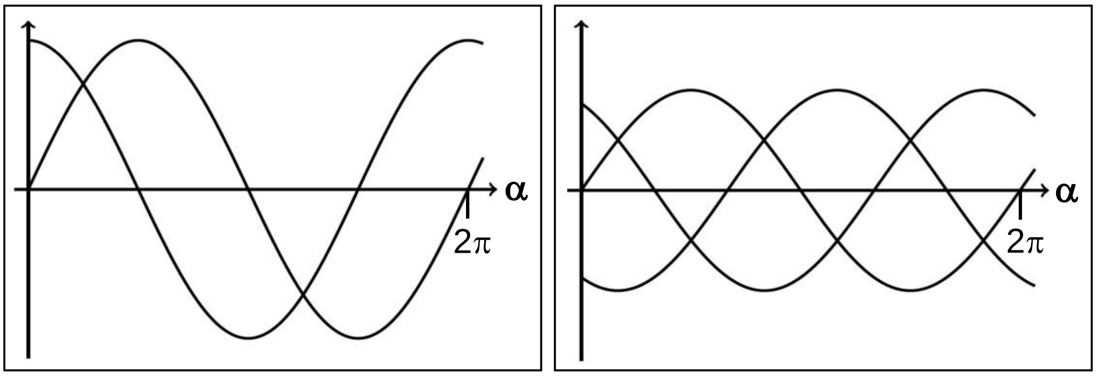

Abb.4: Phasenbeziehungen zwischen inneren und äußeren Produkten bei kanonischer Aufspaltung (links) und alternativer S_3-Aufspaltung (rechts).

Physik des Drehstroms in Zeigerdarstellung, zu modellieren. In Abbildung 4 wird dies in Anlehnung an (Horn 2013) gezeigt.

Literatur

Hellman, H. (2006): Great Feuds in Mathematics. Hoboken: John Wiley & Sons.

Hestenes, D. (2003): Reforming the Mathematical Language of Physics. Oersted Medal Lecture. American Journal of Physics. 71 (2), 104-121.

Horn, M. E. (2012a): Die Geometrische Algebra der (3 x 3)-Matrizen. In: M. Ludwig & M. Kleine (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2012, Münster: WTM, 393-396.

Horn, M. E. (2012b): Pauli-Algebra und S_3-Permutationsalgebra. Eine algebraische und geometrische Einführung. Ventus Publishing ApS, URL: http://bookboon.com/de/studium/mathematik/pauli-algebra-und-s3-permutationsalgebra [29. Okt. 2012].

Horn, M. E. (2013): Der Übergang von Wechsel- zu Drehstrom. Beitrag DD 20.1 der DPG-Frühjahrstagung in Jena, zur Veröffentlichung vorgesehen in www.phydid.de.

Parra Serra, J. M. (2009): Clifford Algebra and the Didactics of Mathematics. In: Advances in Applied Clifford Algebras, 19 (3, 4), 819-834.

Poincaré, H. (1904): Wissenschaft und Hypothese. Leipzig: Verlag von B. G. Teubner.

Von Weizsäcker, C. F. (1994): Aufbau der Physik. 3. Auflage, München: dtv.