Torsten LINNEMANN, Michaela TURINA, Basel

Lernumgebungen differenziert begleiten

Entwicklungsidee «Kognitiv aktivierende Materialien für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II» – KAMM

Die Fachmittelschule ist in der Schweiz einer der Hauptzubringer für das Studium des Primarlehramts. Für diese Schulform sollen Unterrichtsmaterialien entwickelt werden, die

- kompetenzorientiert sind,
- das Engagement im Mathematikunterricht erhöhen
- für angehende Primarlehrpersonen relevant sind

Durch begleitende Forschung soll Qualität sichergestellt werden – und auch Erkenntnis generiert werden. Die vorgestellte Arbeit zeigt exemplarisch die Entwicklung am Beispiel einer Lernumgebung zu Zahlenmauern auf.

Forschungsfragen und Vorgehen

Im Rahmen einer für den Einsatz in der Primarschule typischen substanziellen Lernumgebung zu Zahlenmauern werden drei Fragen bearbeitet:

- Inwieweit lässt sich das Kategoriensystem zum innermathematischen Experimentieren von Leuders et al (2011) und Phillipp (2013) auf die Situation „Zahlenmauern“ und schriftliche Bearbeitung übertragen
- Zeigen sich charakteristische Unterschiede bei der Bearbeitung in verschiedenen Alterskategorien (Primarschule, Fachmittelschule (Sek II) und Studium des Lehramts?
- Wie lassen sich verschiedene Lösungswege charakterisieren, wie kann eine daran adaptierte Lernwegbegleitung aussehen?

Zunächst wurde eine substanzielle Lernumgebung zum Thema Zahlenmauern, deren Idee sich im Zahlenbuch 6 (Affolter et al, 2000) findet, in der Primarschule und bei Studierenden des 1. Semesters eingesetzt. Auffallend war, dass 94% der Primarschülerinnen und Primarschüler und 50% der Studierenden mit der Bearbeitung des ersten Teilauftrags zufrieden waren. Das Potenzial wurde nicht erschlossen. Elemente des Kategoriensystems zur ersten Forschungsfrage liessen sich nicht entdecken - die Bearbeitungen blieben auf Stufe der Beispiele.

Darauf wurde die Lernumgebung überarbeitet, auf vierstufige Zahlenmauern reduziert und bei Schülerinnen und Schülern der Fachmittelschule (10. Klasse) und Studierenden des Primarlehramts im 4. Semester eingesetzt.

Innermathematisches Experimentieren

Bei der Evaluation der Bearbeitungen war die Dissertation von Kathleen Philipp „Experimentelles Denken“ (2013) leitend. Innermathematisches Experimentieren ist definiert durch;

> „Das Hypothesenbilden und Hypothesenprüfen, welches sich in einem konkreten Phänomenbereich an Beispielen vollzieht (…) wird im Folgenden als Innermathematisches Experimentieren bezeichnet.“ (Leuders, Naccarella, Philipp, 2011)

In Ihrem 3-Räume Modell stellen Leuders et al (2011) innermathematisches Experimentieren als Arbeiten in drei Räumen dar: Beispielraum, Strategieraum und Hypothesenraum dar. Im Strategieraum werden Strukturen gesucht und Hypothesen geprüft.

Lernumgebung Zahlenmauern

Der Kontext Zahlenmauern war allen Teilnehmenden der Studie bekannt, so dass die Aufgabe kurz gefasst werden konnte:

Gehen Sie aus von einer Zahlenmauer, bei der alle Grundsteine gleich 5 sind.

Der Deckstein ist dann 40.

a) Verändern Sie einen der vier Grundsteine so, dass der Deckstein 52 ist. Welche Möglichkeiten gibt es?

b) Wie ist es mit dem Deckstein 49? Welche Möglichkeiten gibt es bei 48?

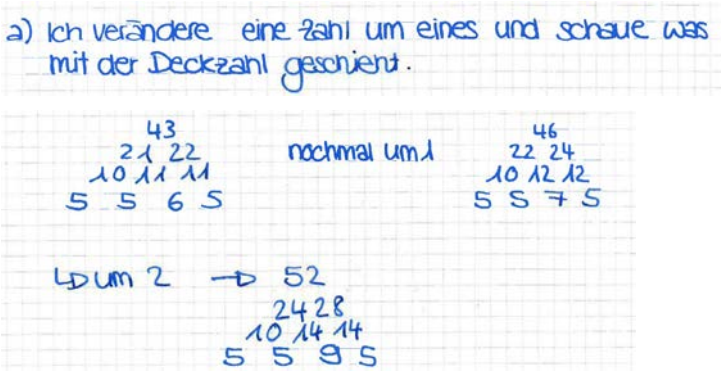
c) Reflexion: Wie sind Sie bei der Bearbeitung vorgegangen? Welche Beispiele haben Sie gebildet, welche Erkenntnisse sind Ihnen gekommen?

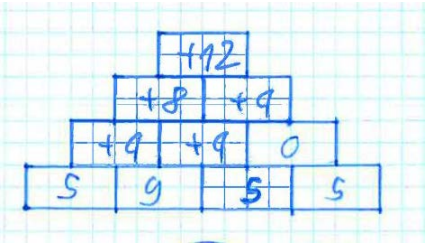
Innermathematisches Experimentieren

In der dieser Lernumgebung liess sich in 59 Prozent der Arbeiten der Studierenden Arbeit im Strategieraum identifizieren im Vergleich zu 79 Prozent bei der FMS. Aufgrund der kleinen Fallzahl, n=15 (FMS) bzw n=17 (Studierende), und der verschiedenen Vorbereitungen lassen sich daraus aber keine allgemeinen Schlüsse ziehen. Die Analyse der Arbeiten liefert allerdings qualitative Ergebnisse:

Die verschiedenen Räume liessen sich gut erkennen, hier zwei Beispiele zur Struktursuche im Strategieraum.

Beispiele: kleinste Änderung: Verfolgung der Änderung





Graphik 1 Graphik 2

Durch Analyse der Dokumente, insbesondere der Reflexionen kann das typische Wechseln zwischen den verschiedenen Räumen bestätigt werden.

1. Formulierung eines Beispiels – Beispielraum
2. Andere Beispiele andenken (Problem verstehen) – Strategieraum.
3. Eine (vage) Hypothese erstellen – Hypothesenraum.
4. Ansatz zur Verifizierung suchen (Plan ausdenken) – Strategieraum.
5. Ansatz schriftlich bearbeiten (Plan durchführen) – Strategieraum.
6. Hypothese oder Lösungsalgorithmus formulieren – Hypothesenraum.

Die Schritte 2 bis 4 erfolgen oft ohne schriftliche Fixierung, lassen sich dann aber aus der Reflexion herausarbeiten. Die Formulierung der zahlenmässigen Lösung erfolgt im Rahmen der Schritte 5 und 6.

Folgerungen, Ergebnisse für das Kategoriensystem „innermath. Exp."

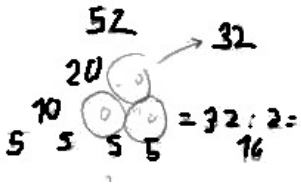
Mit zunehmender Expertise nimmt die Zahl der benötigten Beispiele ab. Es wird schnell zur Struktursuche übergegangen, bei der Strategien aus anderen Lernumgebungen übernommen werden können (zum Beispiel Algebraisierung der Situation). Das typische Vorgehen als Wechsel zwischen den Räumen bleibt erhalten. Das Kategoriensystem sollte also im Strategieraum um algebraische oder allgemein-arithmetische Ansätze (Graphik 2) erweitert werden. Auch sind Kategorien wie „kleinstes" und „grösstes" Beispiel eher im Strategieraum zu verorten.

Lernbegleitung und Studierende der Primarstufe

In „Lernumgebungen im Mathematikunterricht" stellen Hirt und Wälti (2008) dar, wie Lernumgebungen von Lehrpersonen so begleitet werden können, dass das Potenzial zum Beispiel der natürlichen Differenzierung

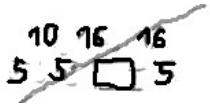
voll zum Tragen kommen kann. In der vorliegenden Arbeit wurde versucht, Hinweise lernwegspezifisch zu erarbeiten.

So ist die Strategie „rückwärts arbeiten“ bei Zahlenmauern nur bei Veränderung der äusseren Zahlenreihe eindeutig. Wird versucht, mittlere Steine zu ändern, erscheinen schnell Probleme, wie die Graphik 3 zeigt.



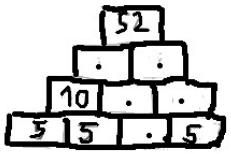
Graphik 3

Der Student zeigt im nächsten Schritt auf, dass sein Ansatz keine Lösung bringt, Graphik 4



Graphik 4

Schliesslich wird aber davon ausgehend erst richtig die Struktur von Zahlenmauern erkannt: die mittleren Grundsteine haben Einfluss auf mehrere Steine weiter oben, Graphik 5



Graphik 5

Nach Erstellung der Graphik 5 formulierte der Student: „Durch Überlegen erschien mir, dass die 9 passen könnte“. Der zwar naheliegende aber hier problematische Ansatz des Rückwärts Arbeitens führt hier also zu Erkenntnissen. Die Lernenden sollten angeregt werden, sich die Zusammenhänge mit Hilfe Ihres Ansatzes zu erschliessen.

Erkenntnisse zur Lernbegleitung

Ohne nachhaltige Lernbegleitung von sich aus keine mathematische Vertiefung. Es braucht Anregungen von aussen, um das Mathematisieren zu strukturieren.

Trotz reichhaltiger Aufgabenstellung bleibt die Bearbeitung oft auf Niveau Kenntnisse, Fertigkeiten. Es braucht strukturierende Anregungen von aussen, damit vertiefende Mathematisierungen erfolgen. Deshalb ist die fachliche Durchdringung der Aufgabe durch die Lehrperson notwendig.

Literatur

Affolter, W., Amstad, H., Doebeli, M. und Wieland, G. (2000): Das Zahlenbuch 6. Zug: Klett und Balmer.

Hirt, U; Wälti, Beat (2008): Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Seelze: Kallmeyer.

Leuders, T., Naccarella, D. und Philipp, K. (2011): Experimentelles Denken – Vorgehensweisen beim innermathematischen Experimentieren. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 32(2), 205 - 231

Philipp, K. (2013). Experimentelles Denken. Theoretische und empirische Konkretisierung einer mathematischen Kompetenz. Wiesbaden: Springer.