

Bernd NEUBERT, Gießen

## **Kombinatorische Aufgaben in der Grundschule**

Kombinatorische Aufgaben sind schon seit langer Zeit Bestandteil des Mathematikunterrichts in der Grundschule.

„Das Kombinieren – gemeiniglich ganz und sehr mit Unrecht vernachlässigt – gehört zu den allerleichtesten und vieles erleichternden Übungen, recht eigentlich für Kinder. Dass zwei Dinge ihre Stellung rechts und links (hinten und vorn, oben und unten) wechseln können, ist der Anfang. Dass drei Dinge sich sechsfach (in einer Linie) versetzen lassen, ist die nächste Folge. Wie viele Paare man aus einer Menge vorliegender Dinge nehmen könne, ist eine der leichtesten Fragen. Wie weit man fortzuschreiten habe, müssen die Umstände bestimmen.“ (Herbart 1841)

Im Beitrag soll der Frage nachgegangen werden, welches didaktische Potenzial sich im heutigen Zeitalter der Bildungsstandards damit verbinden lässt.

### **Einordnung kombinatorischer Aufgaben**

Die Kombinatorik ist ein Teilgebiet der Mathematik, dessen Inhalt sich von dem anderer mathematischer Disziplinen, zum Beispiel der Zahlentheorie, Geometrie oder Wahrscheinlichkeitsrechnung nur schwer abgrenzen lässt. Sie beschäftigt sich mit Problemen der Anordnung oder der Auswahl von bestimmten Objekten aus verschiedenen Bereichen der Wirklichkeit oder unseres Denkens und wird auch als „Kunst des geschickten Abzählens“ bezeichnet.

Die mathematische Zielstellung der Kombinatorik ist durch zwei Aufgabenstellungen gekennzeichnet:

- 1) Es ist festzustellen, welche Möglichkeiten es gibt, Elemente einer endlichen Menge nach bestimmten Bedingungen auszuwählen oder anzuordnen.
- 2) Es ist festzustellen, wie viele Möglichkeiten es dafür insgesamt gibt.

In den KMK-Bildungsstandards findet man nur eine kurze Anmerkung zu kombinatorischen Aufgaben. Unter der Leitidee „Zahlen und Operationen“ wird für den Teilbereich „in Kontexten rechnen“ auf die folgende inhaltsbezogene mathematische Kompetenz orientiert: „Einfache kombinatorische Aufgaben (z. B. Knobelaufgaben) durch Probieren bzw. systematisches Vorgehen lösen“ (2005, S. 9).

In verschiedenen Quellen wird die Kombinatorik in engem Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeit betrachtet. Dies erscheint mir für die Sekundarstu-

fen zur Anwendung der LAPLACE-Formel gerechtfertigt, in der Primarstufe werden für Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik weitgehend verschiedene Ziele verfolgt. Für Wahrscheinlichkeitsaufgaben sind zwar Anzahlbestimmungen nötig, dazu reicht in der Grundschule aber meist zählendes Vorgehen aus. Wirkliche kombinatorische Überlegungen kommen eher selten vor, zum Beispiel bei der Untersuchung verschiedener Summen beim Würfeln mit zwei Würfeln.

### **Entwicklung allgemeiner mathematischer Kompetenzen**

Im Folgenden soll der Frage nachgegangen werden, welches Potenzial kombinatorische Aufgaben für die Entwicklung allgemeiner mathematischer Kompetenzen haben. Der Schwerpunkt wird dabei auf dem **Darstellen** liegen.

Orientiert man sich an den oben aufgeführten Fragestellungen der Kombinatorik, stellt die Suche nach prinzipiellen Möglichkeiten zum Zusammenstellen der endlichen Mengen kaum ein Problem dar, da die kombinatorische Aufgabenstellung in der Regel von Grundschulern verstanden wird. Das **Problemlösen** besteht in der Suche nach allen Möglichkeiten, der Beantwortung der Frage, ob alle Möglichkeiten gefunden wurden und dem Ausschließen „doppelter Möglichkeiten“.

Hier setzen auch die Möglichkeiten zur Entwicklung der Kompetenz des **Darstellens** an. „Für das Bearbeiten mathematischer Probleme geeignete Darstellungen entwickeln, auswählen und nutzen“ (S. 8) lautet die entsprechende Orientierung in den KMK-Bildungsstandards.

Für viele kombinatorische Aufgaben ist die Arbeit auf allen Repräsentationsebenen nach BRUNER möglich. Für den Unterricht müssen sich Lehrer unter anderem folgende Fragen stellen: Wird auf eine Darstellungsform orientiert? Wenn ja, auf welche? Oder sollen die Schüler eigene Möglichkeiten finden?

Im Folgenden werden Erkenntnisse aus Studien zur Arbeit mit kombinatorischen Aufgaben vorgestellt, die im Rahmen von Lehrveranstaltungen bzw. Examensarbeiten an der JLU Gießen durchgeführt wurden. Die Schülerinnen und Schüler konnten die Art der Darstellung selbst wählen.

In der ersten Studie wurden Zweitklässler im November mit drei kombinatorischen Aufgaben konfrontiert: Ermitteln der Anzahl der Möglichkeiten der Anordnung von drei verschieden farbigen Sternen, der Anzahl der Schlittenrennen zwischen vier Kindern, wenn immer zwei Kinder gegeneinander fahren und der Anzahl der unterschiedlichen Möglichkeiten des

Anziehens des Weihnachtsmannes, wenn dieser vier Mützen und drei Mäntel besitzt (vgl. Breiter/Pfeil/Neubert 2009).

Die Schüler kamen beim Bearbeiten dieser Aufgaben erstmals mit kombinatorischen Problemen in Berührung. Die Darstellung der Lösungen wurde von den Schülern selbst gewählt. Dabei entstand eine breite Palette an Möglichkeiten. Während einige Schüler verständlicherweise die Anordnungen sehr emotional zeichneten, waren andere Darstellungen schon wesentlich abstrakter. Auf Nebensächlichkeiten in den Zeichnungen wurde verzichtet, die Anordnungen wurden aufgeschrieben und auch Ansätze von Baumdiagrammen waren zu finden.

In der zweiten Studie lösten Drittklässler, die vorher schon mit kombinatorischen Aufgaben in Berührung gekommen waren, die „Speisekartenaufgabe“. Sie ermittelten die Anzahl aller möglichen Drei-Gänge-Menüs aus Vorspeise (zwei Möglichkeiten), Hauptgericht (vier Möglichkeiten) und Nachtisch (drei Möglichkeiten)

Obwohl die Lehrerin ausreichend Kärtchen zur Verfügung stellte, um alle möglichen Menüs getrennt zu legen, wurde dieses Material nur von wenigen Kindern genutzt. Es gab auch hier viele, recht unterschiedliche Darstellungsformen: Produktregel, Strukturdiagramm und das Notieren der Zusammenstellungen für ein Drei-Gänge-Menü in schriftlicher Form und unter Verwendung selbst erfundener Symbole (vgl. Jung 1999, Neubert 2011).

Ziel der dritten Studie (vgl. Werner 2011) war, das Notationsverhalten von Grundschulkindern aller vier Jahrgangsstufen miteinander zu vergleichen. Dazu musste eine Aufgabe gefunden werden, die auch schon von Erstklässlern verstanden und bearbeitet werden konnte. Die Wahl fiel auf das Bauen von Türmen aus drei Steinen verschiedener Farbe, wobei für einen Turm jede Farbe nur einmal verwendet werden durfte.

Typisch für Klasse 1 war, dass erst alle Türme mit jeweils neuen Steinen gebaut und anschließend die gefundenen Möglichkeiten notiert wurden.

In Klasse 2 war diese Strategie ebenfalls zu finden, wurde aber auch von anderen Vorgehensweisen abgelöst. Zum einen wurde jeder Turm direkt nach dem Konstruieren notiert, zum anderen wurde das Legematerial nur noch einfach verwendet.

Diese Vorgehensweise war auch in Klasse 3 dominierend. Außerdem kamen in dieser Klassenstufe keine Dopplungen mehr vor und die Vielfalt der Darstellungen nahm stark zu. Es gab ausgemalte Türme, Konturen von Türmen und immer mehr symbolische Darstellungen.

Die Viertklässler zeigten teilweise ein noch höheres Abstraktionsvermögen beim Lösen der Aufgabe. Die Schülerdokumente fielen vielfältiger aus. Es wurden zwar weiterhin Türme bzw. deren Konturen gezeichnet, es war aber auch eine Tendenz zum Arbeiten auf symbolischer Ebene in verschiedenen Varianten zu beobachten. Während einige Kinder die Farben der Steine nebeneinander anordneten, schrieben andere diese (als Turm) untereinander. Manche Schüler verzichteten auch schon darauf, alle Türme zu bauen, sondern lösten die Aufgabe kognitiv.

### **Fazit**

Kombinatorische Aufgaben wirken in der Regel auf alle Kinder äußerst motivierend. Wenn die Kinder die Chance zum eigenständigen Lösen bekommen, sind sehr unterschiedliche Vorgehensweisen zu beobachten. Dies betrifft genau so die Darstellung des Lösungsweges.

Daraus lässt sich eine mögliche Empfehlung für die Behandlung kombinatorischer Aufgaben ableiten: Nach der Formulierung der Fragestellung sollten die Schüler Möglichkeiten und Darstellungsformen selbst suchen und anschließend ihre Lösungswege vorstellen. Besonders wichtige Darstellungsformen sollten explizit behandelt werden.

### **Literatur**

- Breiter, E., Pfeil, C., Neubert, B. (2009): Welche Möglichkeiten gibt es und wie viele? Kombinatorische Überlegungen in der Vorweihnachtszeit. – In: Praxis Grundschule 6, 53 - 56
- Herbart, J. F. (1841): Umriss pädagogischer Vorlesungen. Zweite vermehrte Ausgabe. Göttingen: Druck und Verlag der Dieterichschen Buchhandlung
- Jung, M. (1999): Lösungsverhalten von Schülern der 3. Klasse beim Bearbeiten einer kombinatorischen Aufgabe: Zusammenstellen von Menüs mit drei Gängen. Gießen: Justus-Liebig-Universität, Wissenschaftliche Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung für das Lehramt an Grundschulen (unveröffentlicht)
- Neubert, B. (2011): Kinder veranschaulichen ihre Denkprozesse und Lösungsideen. Zur Entwicklung der allgemeinen Kompetenz des Darstellens im Mathematikunterricht. In: Grundschulunterricht Mathematik 2, 4 - 4
- Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder der Bundesrepublik Deutschland (2005): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004. München
- Werner, M. (2011): Die Turmaufgabe. Wie gehen Kinder unterschiedlicher Jahrgangsstufen mit derselben kombinatorischen Aufgabenstellung um? In: Grundschulunterricht Mathematik 4, 15 - 17