Marcus NÜHRENBÖRGER, Ralph SCHWARZKOPF, Dortmund

Gleichungen zwischen „Ausrechnen“ und „Umrechnen“

Im Gegensatz zum Algebraunterricht in der Sekundarstufe scheint das Gleichheitszeichen im Arithmetikunterricht in der Grundschule auf den ersten Blick nur eine recht konkrete Bedeutung zu haben: Es weist den arithmetischen Operationen ein Ergebnis zu. In dieser Lesart kann man das Gleichheizzeichen als Aufforderung zur Berechnung eines Rechenterms ansehen, d.h. es unterscheidet eher zwischen der operativen Tätigkeit auf seiner linken Seite und dem Ergebnis auf der rechten, als dass es zwei gleiche Terme miteinander verbinden würde.

Auf den zweiten Blick ist aber diese „heile Rechenwelt“ der „Aufgabe-Ergebnis-Deutung“ (Winter 1982, 187) kritisch zu hinterfragen, denn das Gleichheitszeichen ist *das* zentrale mathematisches Zeichen, mit dem man – wie Winter (1982, 210) betont – „nicht beliebig umspringen“ kann, auch (und vielleicht erst Recht) nicht im Anfangsunterricht. Vielmehr wird gefordert, dass das Zeichen von Beginn an im Sinne eines symmetrischen Relationszeichens, das die prinzipielle Austauschbarkeit zweier Terme unterstellt, in den Unterricht einfließt (vgl. auch Malle 1993).

1. Eindrücke aus der empirischen Forschung

Die Perspektive auf das Gleichheitszeichen als Handlungszeichen scheint ebenso gegenwärtig wie bereits in den 70er und 80er Jahren Priorität für Kinder am Ende der Grundschulzeit zu haben (vgl. Borromeo Ferri & Blum 2011). Zahlreichen Studien (zusammenfassend Steinweg 2013, Cai & Knutz 2011) zur Folge erzeugt ein einseitiger, auf das Ausrechnen von Termen fokussierter Mathematikunterricht in der Grundschule eine funktional geprägte Vorstellung auf Gleichungen: “We note that one reason students may lack certain perspectives is that teaching may not highlight these properties explicitly” (Godfrey & Thomas 2004, 269).

Demzufolge ergeben sich für die Kinder in der Sekundarstufe massive Schwierigkeiten beim Deuten von Termbeziehungen, da der Übergang von der Arithmetik zur Algebra nicht angemessen vorbereitet ist (vgl. Borromeo Ferri & Blum 2011). Allerdings geben Seo und Ginsburg (2003) zu Bedenken, dass die Lernenden in spezifischen Kontexten in der Lage sind, relationale Sichtweisen auf das Gleichheitszeichen zu entwickeln. So erkennen Grundschüler ihren Studien nach in eher geometrischen oder sachstrukturellen Kontexten durchaus Beziehungen zwischen zu vergleichenden Objekten, wenngleich sie diese kaum auf arithmetische Inhalte übertragen können - die Autoren sprechen in diesem

Zusammenhang von einer „pseudo-flexiblen“ Interpretation. In diesem Sinne scheint gerade im arithmetischen Kontext das Gleichheitszeichen zu einer eingeschränkten Sicht zu verführen. Mit Blick auf die Anregung des relationalen Verstehens des Gleichheitszeichens weisen Seo und Ginsburg (2003, 169) auf die Entwicklung einer flexiblen Sicht hin:

„It‘s more important, I think, to give them many opportunities to use symbols in many situations than simply to tell them, let´s say: this is the equals sign und what´s one side of the equals sign should be the same as what´s the other side of the equals sign” (Seo & Ginsburg 2003, 169).

Zur Initiierung derartiger Lerngelegenheiten können zwei wesentliche Zugänge unterschieden werden.

(1) Die Kinder sollen das relationale Verständnis durch einen vielschichtigen Umgang mit Gleichungen entwickeln. Dies soll etwa dadurch erreicht werden, dass die Lernenden korrekte und inkorrekte Zahl- und Termvergleiche (auch in unbekannten Zahlenräumen) beschreiben, bewerten, begründen oder verändern (vgl. Winter 1982; Steinweg 2013).

(2) Die Kinder sollen zunächst einmal ein flexibles und tragfähiges Verständnis von arithmetischen Gleichheiten entwickeln, ohne dass diese formal im Sinne einer Gleichung aufgestellt werden müssten.

Im Forschungsprojekt DaruM (Deutungs- und Argumentationsprozesse bei der Behandlung substantieller Aufgabenformate im Mathematikunterricht der Grundschule) wählen wir den zweit-genannten Zugang. Dabei kommt es insbesondere auf zwei Aspekte an: Erstens muss geklärt werden, inwiefern Grundschulkinder ein relationales Verständnis für Gleichheiten entwickeln können, ohne dass ihnen die formal elaborierten Darstellungen und Begriffe aus der Sekundarstufe zur Verfügung stünden. Zweitens müssen inhaltliche Anlässe zur Aufstellung bzw. zur Untersuchung einer Gleichheit geschaffen werden.

2. Gleichheiten verstehen und begründen: Strukturelles Umrechnen

Sofern durch eine Gleichung keine triviale Identität (etwa „4=4“) ausgedrückt wird, besteht ihr Wesen - plakativ formuliert - darin, eine Gleichheit zwischen unterschiedlich aussehenden Termen zu unterstellen. Wir interessieren uns in diesem Sinne nur für „gleiche“ Terme, die anders als zwei identische Terme gewisse Verschiedenheiten aufweisen (vgl. Otte & Zawadowski 1982). Diese Verschiedenheiten mögen für den mathematischen Experten nur als oberflächliche Trivialitäten erscheinen, im Mathematikunterricht der Grundschule sind sie allerdings durchaus zentral. So sind die beiden Terme 8+6 und 10+4 zwar natürlich auch in der ersten Klasse *gleich*, aber sie stellen unterschiedliche Rechenanforderungen an die Kinder und sind dementsprechend zunächst einmal unterschiedlich. Sollen die Lernenden beide Terme als zueinander gleich ansehen, deren Gleichheit also verstehen, dann müssen sie nach Winter (1982) von diesen beiden Darstellungen auf eine gemeinsamen Gegenstandsbezeichnung abstrahieren – mit Hilfe des operativen Prinzips (Wittmann 1985) bezeichnet, müssen die Kinder einen dritten Term finden, den sie durch operative Variation aus jedem der beiden anderen Terme herstellen können. Im obigen Fall wäre ein solcher vermittelnder Term etwa 8 + 2 + 4, denn mit Hilfe des Assoziativgesetzes ließe sich jeder der beiden anderen Terme hieraus herstellen: (8+2)+4 = 8+(2+4). Allerdings ließe sich die Gleichheit auch mit dem Term 10 - 2+2 + 4 aufzeigen; für Kinder ganz sicher nicht derselbe Term wie oben, d.h. die Herstellung der Gleichheit ist durch eine gewisse Mehrdeutigkeit gekennzeichnet.

In unserem Konzept bedeutet das Verstehen von Gleichheit in der Grundschule, dass die Kinder durch *strukturelles Umrechnen*, also durch passende operative Variationen, einen Term in einen anderen überführen; in der Regel vermittelt über einen oder mehrere weitere Term. Die prinzipielle Möglichkeit, verschiedene operative Variationen anzuwenden, bedeutet eine fruchtbare Mehrdeutigkeit des Gleichheitsverständnisses, die wir zu nutzen versuchen. In diesem Sinne sollte eine Ablösung von einer einseitigen Interpretation des Gleichheitszeichens nicht über die Verbannung des Ausrechnens erfolgen, sondern vielmehr über die Konstruktion von Beziehungen zwischen ausgerechneten Objekten über strukturelles Umrechnen.

4. Anlässe, Gleichheiten zu hinterfragen: Produktive Irritationen

Das Bedürfnis von Kindern, Gleichheiten zu hinterfragen und strukturelle Zusammenhänge zu begründen, ist einerseits wesentlich für die Entwicklung eines Gleichheitsverständnisses. So betonen etwa Miller (1986) und Steinbring (2005) eindringlich, dass Grundschulkinder insbesondere (bzw. wenn nicht sogar ausschließlich) im Zuge kollektiver Argumentationen neues Wissen erwerben. Andererseits allerdings ist die Neigung der Kinder, mathematisch zu argumentieren, in der Praxis des Mathematikunterrichts in keinster Weise selbstverständlich. So wundern sich Kinder bisweilen selbst nicht über scheinbar unvorhersehbare Ergebnisse und konstruieren auch nicht allein bzw. spontan im Zuge der Auseinandersetzung mit produktiven Übungen argumentationswürdige Beziehungen zwischen Termen.

Wir gehen davon aus, dass Kinder gerade dann eine Notwendigkeit sehen, mathematische Argumente zu suchen und mit anderen auszuhandeln, wenn sie sich aus dem Fach ergeben; oder anders formuliert, wenn *produktive Irritationen* entstehen (vgl. Nührenbörger & Schwarzkopf 2011).

Irritationen entstehen dann, wenn bisherige Ansichten, Zugangsweisen, Vorstellungen oder Erwartungen im Zuge der fachlichen Notwendigkeit versagen – sie sind aber für in den Fall produktiv, wenn die Kinder Möglichkeiten zur Aufklärung der Spanne zwischen Erwartung und Enttäuschung entwickeln. Hierzu bedarf es spezifischer Aufgabenformate, in denen sich solche Situationen aus fachlicher Notwendigkeit ergeben.

Im Vortrag haben wir dazu einige Beispiele aus unseren Unterrichtsexperimenten vorgestellt.

Literatur

Borromeo Ferri, R. & Blum, W. (2011): Vorstellungen von Lernenden bei der Verwendung des Gleichheitszeichens an der Schnittstelle von Primar- und Sekundarstufe. In: R. Haug & L. Holzäpfel (Hrsg.): BzMU. Münster: WTM Verlag, 127-131.

Cai, J. & Knuth, E. (Hrsg.): Early Algebraization. A Global Dialogue from Multiple Perspectives. Berlin: Springer.

Goodfrey, D., Thomas, M.O.J. (2003): What do they see when they look? In: L. Bragg et al. (Hrsg.): Mathematics Education Research. 263-270.

Malle, G. (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Wiesbaden: Vieweg.

Miller, M. (1986): Kollektive Lernprozesse. Studien zur Grundlegung einer soziologischen Lerntheorie. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Nührenbörger, M. & Schwarzkopf, R. (2013): Gleichheiten in operativen Übungen. Entdeckungen an Pluspfeilen. In: Mathematik differenziert, 4(1), 23-28.

Nührenbörger, M. & Schwarzkopf, R. (2010): Diskurse über mathematische Zusammenhänge. In C. Böttinger et al. (Hrsg.): Mathematik im Denken der Kinder. Anregungen zur mathematikdidaktischen Reflexion. Seelze: Kallmeyer, 169-215.

Otte, M. & Zawadowski, W. (1982): Analogie, Gleichheit und mathematische Begriffe. In: Mathematiklehrer, (1), 6-7.

Seo, K., Ginsburg, H. (2003): Classroom context and children's interpretations oft he equals sign. In: A. Baroody & A. Dowker (Hrsg.): The Development of Arithmetic Concepts and Skills. London: LEA, 161-187

Steinbring, H. (2005): The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective. New York: Springer.

Steinweg, A.S. (2013 / im Druck): Algebra in der Grundschule. Heidelberg: Spektrum.

Winter, H. (1982): Das Gleichheitszeichen im Mathematikunterricht der Primarstufe. In: mathematica didactica, 5, 185 – 211.

Wittmann, E.Ch. (1985): Objekte – Operationen – Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. In: mathematik lehren, 11(8), 7-11.

Wittmann, E.Ch. (1995): Unterrichtsdesign und empirische Forschung. In: K.P. Müller (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker, 528-531.