Laura OSTSIEKER, Paderborn

Konvergenz von Folgen - Eine Studie zur Wissensentwicklung im Rahmen einer Analysis 1-Vorlesung

Die Konvergenz von Folgen ist ein zentraler Begriff der Analysis 1-Vorlesung, mit dem viele Studierende Schwierigkeiten haben.

1. Forschungsstand

Zu Schwierigkeiten mit dem Konvergenzbegriff wurden bereits zahlreiche Untersuchungen veröffentlicht. Hier soll ein kurzer Überblick über einige wichtige Ergebnisse gegeben werden. Eine große Bedeutung für den Konvergenzbegriff spielt zunächst einmal der Folgenbegriff, dies betont auch Weigand (1993). Viele Lernende haben jedoch bereits Schwierigkeiten mit Folgen, insbesondere wenn diese nicht als Term gegeben sind. So schreiben Tall und Vinner (1981), dass abschnittsweise definierte Folgen von einigen Lernenden gar nicht als eine Folge aufgefasst werden. Zudem berichten sowohl Davis und Vinner (1986) als auch Roh (2005), dass viele Lernende intuitiv zunächst fälschlicherweise davon ausgehen, dass zu einem festen Index N der „Fehler“ ε bestimmt werden müsse. Als eine weitere mögliche Ursache für Fehlvorstellungen wird die Diskrepanz zwischen der mathematischen Sprache und der Alltagssprache genannt, vgl. Monaghan (1991) und Tall und Vinner (1981). So haben einige Begriffe, die oft im Zusammenhang mit der Konvergenz von Folgen benutzt werden, in der Alltagssprache eine andere Bedeutung als in der Mathematik. Mit den alltagssprachlichen Bedeutungen sind oft dynamische Vorstellungen verbunden. Diese sieht Bender (1991) gerade zu Beginn des Lernprozesses eher kritisch. All das kann zu verschiedenen Fehlvorstellungen führen. So sind einige Lernende der Meinung, der Grenzwert werde nie erreicht, vgl. Davis und Vinner (1986). Andere sind der Ansicht, es könne mehrere Grenzwerte geben, vgl. Roh (2005), wiederum andere erkennen nicht, dass es einen Unterschied zwischen Grenzwerten und Häufungspunkten gibt. Eine weitere Fehlvorstellung ist, dass Grenzwerte als unendliche Prozesse angesehen werden, nicht als Ergebnisse unendlicher Prozesse, vgl. Marx (2013). Davis und Vinner (1986) berichten von der Fehlvorstellung, konvergente Folgen seien immer monoton und, dass der Grenzwert als obere oder untere Schranke aufgefasst werde.

2. Fragestellungen

Viele der genannten Ergebnisse stammen aus Untersuchungen mit Schülern oder Studierenden anderer Fächer, jedoch nicht von Studierenden des Bachelorstudienganges Mathematik oder des gymnasialen Lehramts. Daher soll zunächst untersucht werden, welche Schwierigkeiten speziell bei dieser Gruppe von Studierenden im Zusammenhang mit der Konvergenz einer Folge auftreten. Im Rahmen meines Dissertationsvorhabens soll außerdem untersucht werden, wie das Verständnis dieses Begriffes durch einen Workshop, in dem die Begriffsentwicklung exemplarisch behandelt wird, gefördert werden kann, und ob sich diese exemplarische Begriffsentwicklung förderlich auf die Lernergebnisse der Studierenden auswirkt.

3. Methode und Design

Um die Wissensentwicklung quantitativ zu untersuchen, wurden ein Vor- und Nachtest zum Thema Folgen und Konvergenz entwickelt und im Wintersemester 2012/2013 in Paderborn in der Veranstaltung Analysis 1 eingesetzt. Beide Tests bestehen aus jeweils neun Items, die teilweise selbstentwickelt sind, und hatten eine Dauer von 25 Minuten. Der Vortest wurde in der zweiten Semesterwoche, bevor das Thema Folgen und Konvergenz behandelt wurde, von 167 Studierenden bearbeitet. Darin werden technische Fähigkeiten wie das Rechnen mit Brüchen, Ungleichungen und Beträgen, Vorwissen zu Unendlichkeit und Folgen und Argumentationsfähigkeiten abgeprüft. Der Nachtest wurde von 118 Studierenden in der zehnten Semesterwoche geschrieben, nachdem das Thema Folgen und Konvergenz in der Vorlesung abgeschlossen war. Darin werden Folgen in verschiedenen Darstellungen, die Untersuchung von Folgen auf Konvergenz, das Verständnis der Definition und Zusammenhänge zwischen dem Konvergenzbegriff und anderen Begriffen abgeprüft.

Beide Tests sollen mit der Methode der Rasch-Skalierung ausgewertet werden.

4. Erste Ergebnisse

Zu einzelnen Items sollen nun erste Ergebnisse vorgestellt werden. Ein selbstentwickeltes Item aus dem Vortest lautet:

Wir betrachten verschiedene Zahlenfolgen. Versuchen Sie möglichst genau auszudrücken, was jeweils mit a_n passiert, wenn n beliebig groß wird.

a) $a_n = 1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$

b) $a_n = (-1)^n - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$

c) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}$

Aufgabenteil a) wurde von 81,4% der Studierenden angemessen gelöst, b) von 51,5% und c) von 44,9%. Die Beschreibungen wurden jeweils kategorisiert. Bei Aufgabenteil b) sind die folgenden Kategorien aufgetreten:

Kategorie	*Definition*
korrekte Beschreibung	1 und -1 wurden als Häufungspunkte genannt oder es wurden die beiden Teilfolgen beschrieben, die gegen 1 bzw. -1 konvergieren.
Beschreibung mit zwei Grenzwerten	In der Beschreibung werden 1 und -1 als Grenzwerte bezeichnet.
unvollständige Beschreibung	Alles, was ausgesagt wird, ist korrekt, aber die Beschreibung ist unvollständig.
Beschreibung des Terms	Es wird lediglich der Term beschrieben und nichts über die beiden Häufungspunkte ausgesagt.
falsche Beschreibung	Die Beschreibung enthält inhaltlich falsche Aspekte.
keine Beschreibung	Es wurde nichts geschrieben.

Ein Item aus dem Nachtest, das ebenfalls selbstentwickelt wurde, ist das folgende:

Entscheiden Sie jeweils, ob die Verbalisierung äquivalent zur Definition der Konvergenz einer Folge ist. Falls sie nicht äquivalent ist, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

a) Eine Folge konvergiert gegen einen Wert, wenn ihre Folgenglieder diesem Wert mit wachsendem n immer näher kommen.

b) Eine Folge konvergiert gegen einen Wert, wenn ihre Folgenglieder diesem Wert mit wachsendem n immer näher kommen, ohne ihn je zu erreichen.

c) Eine Folge konvergiert gegen einen Wert, wenn in jeder beliebigen Umgebung um diesen Wert unendlich viele Folgenglieder liegen.

Alle drei Verbalisierungen sind nicht äquivalent zur Definition der Konvergenz. 28,8% der Studierenden haben Teil a) richtig gelöst, 22,0% haben es richtig beantwortet und ein geeignetes Gegenbeispiel angegeben. Bei Teil b) sind die Lösungsraten 64,4% bzw. 50,8% und bei c) 40,7% bzw. 26,3%. Nur 6,8% der Studierenden haben das Item komplett richtig bearbeitet.

Sowohl im Vortest als auch im Nachtest wurde das folgende Item gestellt:

Ist $0,\overline{9} = 1$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hier ist ein Wissenszuwachs zu verzeichnen. Im Vortest wurde dieses Item von 46,2% der Studierenden, die beide Tests geschrieben haben, richtig gelöst, im Nachtest hingegen von 81,3%.

5. Diskussion

Es zeigt sich, dass die Studierenden Items, in denen Folgen angegeben waren und auf Konvergenz untersucht werden sollten, zwar relativ gut gelöst wurden. Jedoch traten viele Fehler bei dem Item auf, bei dem das Verständnis der Definition durch angegebene Verbalisierungen geprüft wurde. Die angegebenen Verbalisierungen stehen in Zusammenhang mit verschiedenen aus der Literatur bekannten Fehlvorstellungen. Diese Fehlvorstellungen treten also auch bei den hier untersuchten Studierenden auf. Die Ergebnisse sind insofern plausibel, dass das konkrete Berechnen von Grenzwerten in Vorlesung und Übungen häufig durchgeführt wird, aber Verbalisierungen eher selten behandelt werden.

Literatur

Bender, P. (1991): Fehlvorstellungen und Fehlverständnisse bei Folgen und Grenzwerten. In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, 44, 238 - 243.

Davis, R. B. & Vinner, S. (1986): The Notion of Limit: Some Seemingly Unavoidable Misconception Stages. In: The Journal of Mathematical Behavior, 5, 281 - 303.

Marx, A. (2013): Schülervorstellungen zu unendlichen Prozessen - Die metaphorische Deutung des Grenzwerts als Ergebnis eines unendlichen Prozesses. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 34, 73 - 97.

Monaghan, J. (1991): Problems with the Language of Limits. In: For the Learning of Mathematics, 11, 20 - 24.

Roh, K. H. (2005): College Students‘ Intuitive Understanding of the Concept of Limit and their Level of Reverse Thinking. Doktorarbeit, The Ohio State University, Columbus, OH.

Tall, D. O. & Vinner, S. (1981): Concept Image and Concept Definition in Mathematics, with Particular Reference to Limits and Continuity. In: Educational Studies in Mathematics, 12, 151 - 169.

Weigand, H.-G. (1993): Zur Didaktik des Folgenbegriffs. Mannheim: BI Wissenschaftsverlag.