Wilhelm STERNEMANN, Lüdinghausen

"Verhalten" von Ganzrationalen Funktionen - inhaltliche Denkanstöße zum Analysisunterricht

Der Anlass: Die "Untersuchung des Verhaltens einer ganzrationalen Funktionen für x→∞" ist eine Routineteil der leidigen Kurvendiskussionen. In manchen Schulbüchern der Stufe 10 EF wird sie schon vor der Ableitung behandelt. Bekanntlich soll der Schüler soll nur das Vorzeichen von f(x) für x→∞ auf dem Weg nach Unendlich angeben. $g(x) = a_n x^n$ vererbt sein "Verhalten" auf $f(x) = a_n\, x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ und ist als "einfache" Potenzfunktion für den Schüler gut zu überblicken. Auch die Begründung für diese "Vererbung" ist im MU durch eine Zerlegung gut einsehbar: $f(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1\, x + a_0$ $= a_n x^n \cdot (1 + \frac{a_{n-1}}{a_n \cdot x} + \ldots + \frac{a_1}{a_n \cdot x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n \cdot x^n})$, denn der zweite Faktor konvergiert gegen 1 und hat für x oberhalb einer Grenze G>0 positives Vorzeichen, so dass dann $g(x) = a_n\, x^n$ und $f(x)$ gleiches Vorzeichen haben.

Dies ist uralter Standart im MU und es wäre darüber kein Wort verloren worden, wenn in meinem Schulbuch nicht der Zusatz gestanden hätte: *„Die Funktionswerte von f(x) und g(x) = a_n x^n stimmen bei wachsendem x immer besser überein."*, was noch mit einer "gewagten" Wertetabelle untermauert wurde. Das hört sich so an, als ob z. B. $f(x)=x^5+x^4$ *bei wachsendem x immer besser mit* $g(x)=x^5$ *übereinstimmt*, trotz der Differenz $f(x)–g(x)=x^4$, mit der die Funktionswerte hochgradig auseinanderdriften. Unser spontanes Sprachempfinden meint hier offenbar nicht den vorliegenden mathematischen Sachverhalt, nämlich "f(x) / g(x) → 1, für x→∞".

Wir, Lehrer und Schüler, meinen im Sprachgebrauch der Schule mit "immer besser übereinstimmen", dass |f(x)–g(x)|→0, dass die Distanz der Werte verschwindet, was hier völlig falsch wäre. Der mathematische Sachverhalt würde in der Schulsprache lauten: Die Funktionen nähern sich anteilmäßig, prozentual an, aber nicht absolut. Die Distanz der Werte kann dabei auf dem Weg ins Unendliche erheblich auseinanderdriften. In der Fachmathematik wird so etwas mit der sog. Landau-Symbolik ausgedrückt: "f(x) = O(g(x)) für x → ∞". f(x) und g(x) heißen dann sogar oft "*asymptotisch gleich*". Dabei muss aber nichts gleich werden und die entscheidende Angabe, wohin sich x sich bewegt, wird nur oft aus dem Zusammenhang klar!

These: Ein solches Divergieren darf den Schülern nicht verschwiegen werden. Die Landau-Symbolik ist nützlich für Fachleute (Zahlentheorie, Informatik), aber für die Schule eher ungeeignet.

Im Folgenden geht es bei diesem althergebrachten Inhalt konstruktiv auf neue mathematische Entdeckungsreise.

Anregung 1: Zum "Verhalten im Unendlichen" von ganzrationalen Funktionen:

Im nebenstehenden Bild sind die Kurven $f(x) = x^5 – 3x^4 – 30x^3$ und $g(x) = x^5$ vertikal stark gestaucht mit Geogebra dargestellt. An den Termen ist abzulesen, dass die beiden Kurven in ihrem vertikalen Abstand mit x^4+10x^3 divergieren. Trotzdem sieht es so aus, als ob sich die Kurven immer weiter annähern? Wir drehen uns mal um 90° und fragen neu: Wie nah kommen sich die Kurven horizontal gemessen? (Siehe Abb.2).

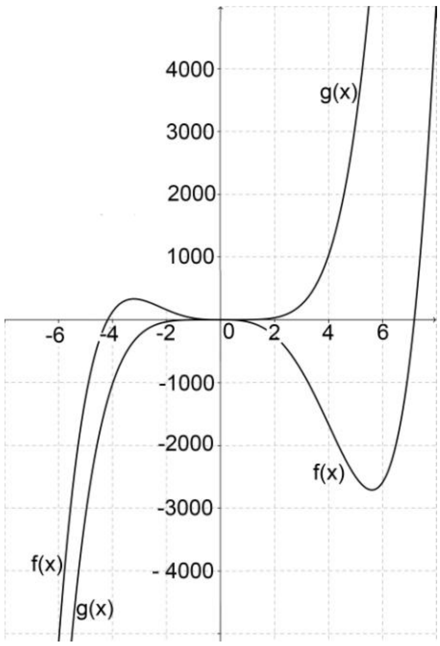

Abbildung 1

Rechnung: $g(x) = x^5$ ist als Potenzfunktion bequem umzukehren und x_2 als $g^{-1}(f(x_1))$ auszudrücken: $x_2 = (x_1^5 – 3\,x_1^4 – 30\,x_1^3)^{1/5}$.

Die Formel für den horizontalen Abstand lautet: $d(x_1) = x_1 – x_2 = x_1 – (x_1^5 – 3\,x_1^4 – 30\,x_1^3)^{1/5}$.

$d_\infty = \lim_{x\to\infty} d(x)$ ist ein Limes der Art "$\infty – \infty$"

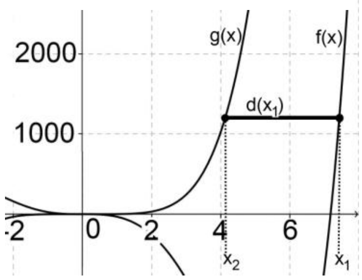

Abbildung 2

und von einem Schüler mit seinem Schulwissen nicht zu erraten oder gar analytisch zu ermitteln, wie das bei der Ableitung in einigen Fällen möglich war. Aber die Ausdrücke lassen sich bei CAS mit Limesfunktion eingeben und ausrechnen. Schon dadurch, dass die Limesbildung für die Schüler als eine nichttriviale Blackbox erfahren wird, gewinnt der Grenzwertbegriff eine echte intellektuell ehrliche Verstärkung.

Wie die Zuhörer im Vortrag gespannt waren, so werden auch Schüler neugierig auf das Ergebnis von sein, wenn die paradoxe Situation genügend deutlich gemacht wird. Auch erfahrene Mathematiker waren sich über das Ergebnis unsicher. Die am häufigsten gehörte Vermutung war $d_\infty = 0$. Das Ergebnis, welches DERIVE ausgab, war durchweg eine Überraschung: $\mathbf{d_\infty = 0{,}6}$ **!** Jetzt ist spontan die mathematische Entdeckungslust geweckt worden. Man findet auch bei $x\to -\infty$ $\mathbf{d_{-\infty} = 0{,}6}$ **!** (Für die Schüler sind Schnittpunkte con g und f zu beachten! Man experimentiert mit den verschiedensten ganzrationalen Funktionen und verallgemeinerten Termen, die die CAS-Software noch akzeptiert, z.B. alle ganzrationalen Funktionen

dritten Grades: f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d und g(x) = ax^3 ergibt sich: $d_\infty = \frac{-b}{3\,a}$
Bei denen 5ten Grades f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f und g(x) = ax^5. ergibt sich $d_\infty = \frac{-b}{5\,a}$. Für beliebige ganzrationale $f(x) = a_n\,x^n + a_{n-1}x^{n-1} + .. + a_1x + a_0$ und $g(x) = a_nx^n$ stößt man auf die überraschende finale Vermutung, dass $d_\infty = \frac{-a_{n-1}}{n\,a_n}$. Hier gerät allerdings die Software von DERIVE bis Mathematica an ihre Grenzen. Erst mit L'Hospital "von Hand" nachgerechnet - was der Lehrer heute auch den staunenden LK-Schülern leider nur als exotisches Stück Mathematik vorführen kann - ergibt sich der Beweis der Vermutung. Dieses schöne und verblüffende Ergebnis kann man mit den Schülern mit Gewinn reflektieren. Etwa: Das vollständig beschriebene Verhalten im Unendlichen wird nicht allein vom "höchsten" Summanden sondern von den zwei höchsten Summanden bestimmt. Erst wenn man die Potenzfunktion aus dem höchsten Summanden einer ganzrationalen Funktion horizontal um d_∞ verschiebt, $g^*(x) = a_n(x + \frac{-a_{n-1}}{n\,a_n})^n$, hat er eine wirkliche zu $f(x)$ asymptotische Lage. Als Bezeichnung bietet sich "horizontal-asymptotisch" an, wegen der betrachteten horizontalen Abstände an. Diese sind asymptotisch im alten Sinne bei den entsprechenden Armen der Umkehrfunktionen. u.s.w. Solche Betrachtungen lassen sich auf die Spezialfälle quadratische und kubische Funktionen anwenden und vieles mehr. Sie sind noch lange nicht an ihrem Ende.

Anregung 2: Als zweiter Fall von "Verhalten einer ganzrationalen Funktion" wurde in meinem Schulbuch das bei x→0 thematisiert.

Es besteht eine reizvolle Form von "Dualität":

<table>
<tr><td colspan="2">$f(x) \;=\; a_n\,x^n \;+\; a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + a_1\,x \;+\; a_0$</td></tr>
<tr><td>**x → ∞**</td><td>**x → 0**</td></tr>
<tr><td>Die „höchsten“ Summanden
$a_n\,x^n + a_{n-1}x^{n-1}$
bestimmen das „Verhalten“.
„asymptotisch“ im weit. Sinn</td><td>Die „niedrigsten“ Summanden
$a_1\,x \;+\; a_0$
bestimmen das „Verhalten“.
„approximativ“ / „tangential“</td></tr>
</table>

Der Schüler kann im Bild für die Gerade $a_1\,x \;+\; a_0$ eine besondere Lage zur Kurve $f(x)$ entdecken, in dem man z.B. mit Funktionsplottern die Frage untersucht: Welche der Geraden durch P(0|a_0) gibt das „Verhalten von f(x)“ im Punkt P(0|a_0) am besten wieder? Hier stößt man auf den Begriff der Tangente als lineare Approximation, was auch mit Tabellenkalkulation untermauert werden kann. Ohne schon an Ableitung zu denken, begegnet man hier der Weierstraßschen Ableitungsauffassung nämlich $f(x) \approx$

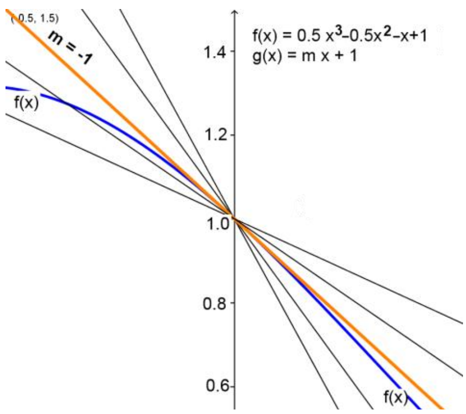

Abbildung 3

$a_1x + a_0 + x^2q(x) = mx + f(0) + r(x)$ mit $\frac{r(x)}{x} \to 0$ $f\ddot{u}r\ x \to 0$. Eine Verallgemeinerung auf quadratische statt lineare Approximation ist als weiteres Experiment sehr interessant.

Auf den wenigen Seiten hier kann nur erwähnt werden, dass statt der Stelle x=0 jede beliebige Stelle x=a ebenso betrachtet werden kann. Man verschiebt f um a in Gegenrichtung f*(x) = f(x+a) und setzt dort x–a ein und hat einen Ausdruck wie bei einer Taylorentwicklung an einer beliebigen Stelle a. $f^*(x) = f(x+a) = \ldots \quad = b_n\, x^n + b_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + b_1\, x + b_0$ und $f(x) = f^*(x-a) = b_n(x-a)^n + \ldots + b_1\,(x-a) + b_0$ ist die Verschiebungsform zum Verhalten an der Stelle x = a. Man kann nun auf andere simple Art den linearen Teil t(x) = $b_1(x-a) + b_0$ als Tangente berechnen.

Anregung 3: Bei der Herleitung der Ableitung von Exponentialfunktionen f(x) = a^x geht man im MU meist so vor, dass man nach f´(x) = f´(0)·a^x die **Beh:** $\lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h} = 1 \Leftrightarrow a = \lim_{k\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} =: e$ beweist. Da dies in sehr vielen Schulbüchern über den mathematisch anfechtbaren Schluss $a^h - 1 \approx h$ mit anschließendem $a^h \approx h$+1 und a ≈ $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ sei hier eine strengere Vorgehensweise vorgeschlagen, angelehnt an Mangoldt ..(1931).

Bew: $\lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h} = 1 \underset{(1)}{\Leftrightarrow} \lim_{h\to 0} \frac{h}{a^h-1} = 1 \underset{(2)}{\Leftrightarrow} \lim_{h\to 0} \frac{h\,\log_b a}{a^h-1} = \log_b a$

$\underset{(3)}{\Leftrightarrow} \lim_{h\to 0} \frac{h\,\log_b a}{a^h-1} = \log_b a \underset{(4)}{\Leftrightarrow} \lim_{h\to 0} \frac{\log_b(1+a^h-1)}{a^h-1} = \log_b a$

$\underset{(5)}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{k\to 0} \frac{\log_b(1+k)}{k} = \log_b a \underset{(6)}{\Leftrightarrow} \lim_{k\to 0} \log_b(1+k)^{\frac{1}{k}} = \log_b a$

$\underset{(7)}{\Leftrightarrow} \lim_{h\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}} = a$ ■. Dabei wurde im Schritt (2) die Gleichung mit der Zahl $\log_b a$ multipliziert. Die Stetigkeit wurde lediglich von der Exponentialfunktion im Schritt (7) benutzt.

Literatur

Mangoldt u. Knopp (1931): Einführung in die höhere Mathematik, Bd. I, S. 475.

Die Folien zum Vortrag: "www.mathe-fenster.de". : sternemann(ad)t-online.de