Sandra THOM

Bruchrechnung – Easy going?!?

Bereits in der Grundschule und teils schon davor werden zentrale Grundvorstellungen zur Bruchrechnung angebahnt: Zeigen viele Kinder bereits vor der Einschulung Fähigkeiten zur Zahlzerlegung durch Anzeigen von Zahlen mit Fingern zweier Hände, wird dies in der Grundschule systematisiert und vertieft über die Arbeit mit Split-Boxen, Zerlegungshäusern etc. Würfelexperimente zur Wahrscheinlichkeit können nicht nur diese Teil-Ganzes-Vorstellung vertiefen, sondern bieten auch bei Darstellung und Interpretation der Ergebnisse in Tabellenform die Möglichkeit zur Nutzung der Bruchschreibweise. Bei der Arbeit mit Größen können Grundvorstellung der Division von Brüchen als Messen („Aufteilen") durch konkretes Ausmessen von Längen oder auch Umfüllen von Volumina aufgebaut werden („Wie oft passt ¼ Liter in 1 ¼ Liter hinein?", „Wie oft kann ich mit einem halben Meter langen Stab diese Raumlänge von 6m auslegen?").

In den ersten beiden Jahren der Sekundarstufe wird die gemeine Bruchrechnung schließlich systematisch eingeführt und beansprucht zu Recht viel Raum im Unterricht. Zugleich bereitet sie vielen Schülern nicht nur auf Grund fehlender arithmetischer Kompetenzen noch aus der Grundschulzeit massive Probleme. Häufige Ursache für Probleme beim Erlernen der Bruchrechnung ist ein durch verfrühtes Kalkül geprägter Unterricht, der die Ausbildung anschaulicher und materialbasierter Vorstellungen zu den Brüchen, das *Be-Greifen*, zu wenig beachtet.

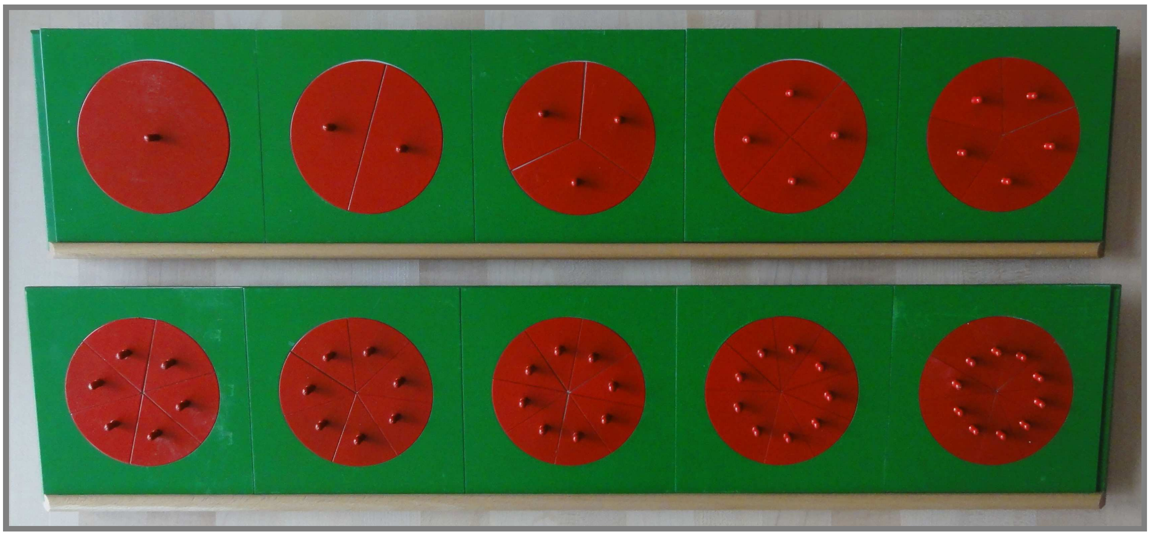

Abbildung 1: Metallene Bruchrechenkreise

Eine Möglichkeit zum Einstieg in einen systematischen Bruchrechenunterricht bietet die aus der Montessori-Pädagogik bekannte Metaphorik der

„Familie der Brüche“, die mit Hilfe der Metallenen Bruchrechenkreise über Nutzung des quasikardinalen Zahlaspekts insbesondere Verständnis bei einen speziellen Grundvorstellungsumbruch von den natürlichen zu den rationalen Zahlen möglich macht.

Die Metaphorik der „Familie der Brüche“ beruht dabei auf dem analogen Denken als Teil mathematischen Denkens, die „Familie der Brüche“ dient als analoges Bild für Teilbarkeiten und Vielfache. Dabei sollte die Metaphorik der „Familie“ nicht überstrapaziert werden – für die Ausbildung einiger Grundvorstellungen zu den Brüchen und erstes Operieren („Vergröbern/Verfeinern“, Addition/Subtraktion über Ergänzen und Vergleichen) hat sie sich jedoch in Erprobungen als äußerst tragfähig erwiesen.

Nach der Benennung der „Familien“ („Das ist die Familie der Halben.“) werden systematisch, beginnend bei den halben, immer die Anzahl der Teile des Bruchkreises genannt („Sie hat zwei Mitglieder.“), ebenso wie die Bezeichnung für jeden einzelnen Teil („Jedes Mitglied heißt ½.“). Zugleich mit der Benennung jedes Bruchteils werden die symbolischen Bezeichnungen auf jeden einzelnen Bruchrechenkreisteil gelegt. Bei den Dritteln, spätestens den Vierteln werden der oder die Schüler in die Einführung mit einbezogen. („Das ist die Familie der Drittel. Sie hat wie viele Mitglieder?“ Und jedes Mitglied heißt …?“) Die Schüler benennen die Bruchteile, schreiben ihre „Namen“ auf vorbereitete Kärtchen und legen sie auf die Metallenen Bruchteile auf. In der Regel durchschauen die Schüler das Muster sehr schnell und setzen es selbstständig fort, sie greifen den Fragen der Lehrkraft häufig sogar vor. Die Benennung des Ganzen – der 1 – erfolgt zuletzt ohne weitere Erläuterungen durch die Lehrkraft: Folgen die Schüler bisherigen Benennungen, wird das Ganze meist von einem Schüler selbstständig 1/1 benannt, andere ergänzen jedoch: „1“.

Welche impliziten Vorstellungen gewinnen die Schüler hierbei? Zunehmend dauert es *länger*, bis die Beschriftungen der Bruchteile einer „Bruchfamilie“ erstellt und aufgelegt sind – die Bruchkreise haben immer *mehr* und *gleich große* Teile, je größer die Zahl im Nenner wird. Die Teile werden zugleich immer kleiner, und bei den Zehnteln benötigen die Schüler schon ein wenig Fingerspitzengefühl, um das Kärtchen auf nur einen einzelnen Bruchteil zu legen. Es entsteht ein Bild, bei dem immer mehr Kärtchen auf den immer kleiner werdenden Bruchteilen liegen, so dass immer mehr Bruchteile „das Ganze“ (den Kreis) teilen. Die Erfahrung des Beschriftens und Belegens *in Verbindung mit* dem einprägsamen Bild am Abschluss bildet eine Vorstellung in den Köpfen der Kinder: Der Weg dorthin als theoretische Abstraktion, als Erfahrung einer Handlung, die später lediglich aus dem Gedächtnis als Ablauf rekonstruiert werden kann, wird *zu-*

sammen mit dem Bild des Ergebnisses der Handlung (Abb. 2) als Form empirischer Abstraktion gespeichert. Die Bruchrechenkreise mit den aufgelegten Kärtchen sollten daher eine Weile sichtbar in der Klasse ausgelegt werden. Eine solche mehrschichtige Vorstellung dient als Grundlage für weiteres Arbeiten und kann sowohl von den Schülern als auch von der Lehrkraft im Laufe des späteren Lernprozesses immer wieder für Modellierungen oder zur verstehenden und selbstständigen Korrektur eventueller Fehler herangezogen werden.

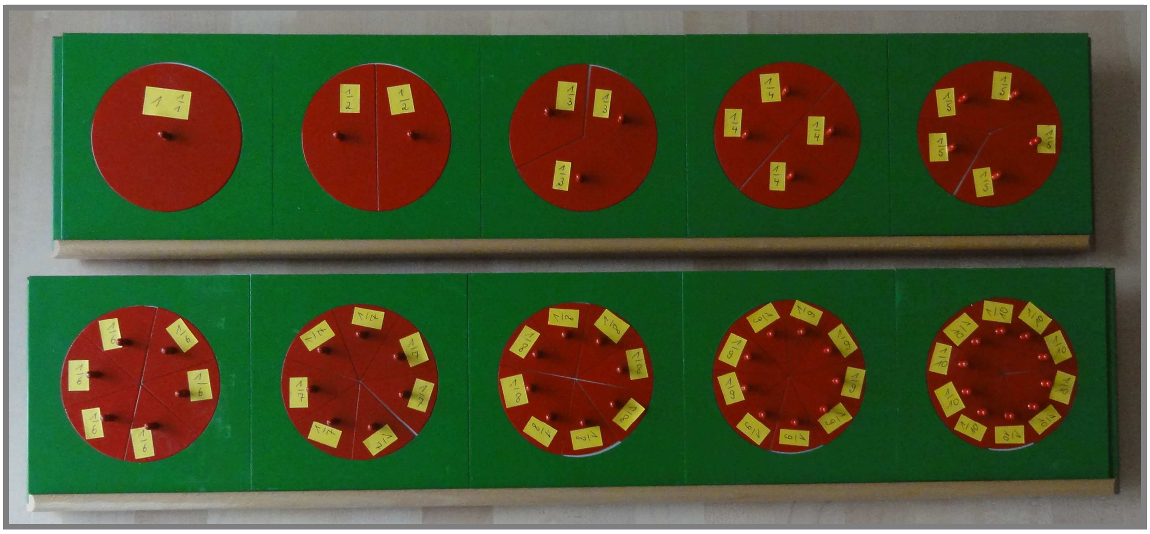

Abbildung 2: Die Bruchteile werden kleiner, dafür aber mehr!

Nach dieser Einführung beginnt die Arbeit mit den Kreisen: „Ich verrate Dir ein Geheimnis – Brüche können miteinander verwandt sein.“

Durch das Herausnehmen eines Halben aus seinem Einsatz wird dort der Platz frei. „Brüche sind miteinander verwandt, wenn wir einen Bruchteil ganz genau ausfüllen können nur mit Teilen einer anderen Familie.“ Über systematisches Probieren – erst mit Dritteln, dann Vierteln – können „Verwandtschaften“ gefunden werden, zuerst gemeinsam, schließlich in selbstständiger Arbeit durch die Schüler. Die Nutzung der symbolischen Sprech- und Schreibweise sollte für den intermodalen Transfer die Arbeit auf enaktiver Ebene begleiten (Abb. 3); die Schüler sollen ihre Ergebnisse beispielsweise in einem kleinen Heft sichern. Auf diese Weise entsteht eine Dokumentation der Teiler bzw. Vielfachen der ersten „Bruchfamilien“, die als Basis für selbstständiges Entdecken und *einsichtiges* Formulieren der Regeln für Teilbarkeit als Grundlage für Verfeinern und Vergröbern („Erweitern“ und „Kürzen“) für alle weiteren Operationen mit den Brüchen dienen kann. Die Begrenztheit des Kreismodells auf wenige mögliche hiermit zu lösende Aufgaben, die nur geringen Möglichkeiten, durch Konstruktion Vorstellungen zu entwickeln wie es z.B. beim Falten von Tangrams oder beim Spannen von Figuren auf dem Geobrett möglich ist, sowie die Notwendigkeit der Ausbildung abstrakter Vorstellungen macht die Nutzung weiterer Repräsentanten für einen intramodalen Transfer schließlich zwingend erforderlich. Für die Arbeit mit Lernmaterialien genügt die Bereitstellung von Anschauungsmaterial nicht; Schüler benötigen zielführende einführende und sichernde, problem- und handlungsorientierte, operative und produktive Aufgaben zum Umgang mit dem Material.

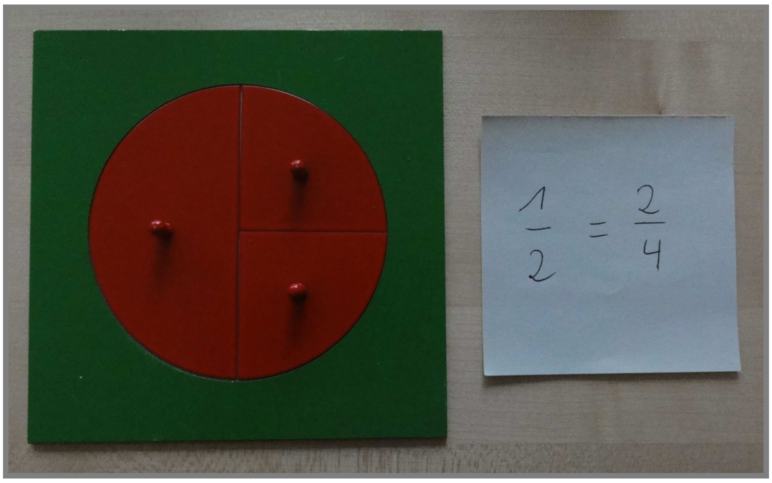

Abbildung 3: Das Ausfüllen des Halben mit Vierteln

Die meisten von Schülern als schwer lernbar, nicht zu verstehende und auf Seiten der Lehrer kaum zu vermittelnde Operationen lassen sich auf vergleichsweise einfache, aber durchdachte Handlungen an konkretem Material und wenige in der Regel die Handlung lediglich benennende Worte reduzieren – auch und gerade als nonverbale „Erklärungen" sind sie zentral für die Ausbildung reichhaltiger individueller Schülervorstellungen. Die Ausbildung solcher Vorstellungen zu den Brüchen ist die Basis für verständnisvolles Anwenden und Grundlage für weiteres Lernen im Sinne genetischen Unterrichts.

Literatur

Padberg, F. (2009): Didaktik der Bruchrechnung für Lehrerfortbildung und Lehrerausbildung, 4. Auflage, Heidelberg: Spektrum.

Peschek, W. (1989): Abstraktion und Verallgemeinerung im mathematischen Lernprozess, in: JMD, 10, 211-285.

Rüede, C. (2009): Wenn das Unausgesprochene regelnd wirkt – eine theoretische und empirische Arbeit zum Impliziten, in: JMD, 30, 93-120.

Thom, S. (2010): Kinder lernen entdeckend. Eine hermeneutische Untersuchung zur Konzeption und Realisierung des Mathematikunterrichts Maria Montessoris, Hildesheim: Franzbecker.