Jörg VOIGT, Münster

Eine Alternative zum Modellierungskreislauf

1. Einleitung

Folgendes Beispiel aus den Studien zur Straßen- bzw. Alltagsmathematik dient zur Orientierung der weiteren Ausführungen. Ein zwölfjähriges Kind verkauft auf der Straße Kokosnüsse und wird von einem Forscher befragt, der sich als Kunde ausgibt:

„Customer: How much is one coconut?

M: 35.

Customer: I‘d like ten. How much is that?

M: (Pause) Three will be 105; with three more, that will be 210. (Pause) I need four more. That is … (pause) 315 … I think it is 350.

This problem can be mathematically represented in several ways: 35x10 is a good representation of the question posed by the interviewer. The subject‘s answer is better represented by 105+105+105+35, which implies that 35x10 was solved by the subject as (3x35)+(3x35)+(3x35)+35.“ (Carraher, Carraher & Schliemann 1985, 23)

Die AutorInnen sind in ihrer Studie an Lösungsquoten und Rechenwegen interessiert. In ihrer Interpretation der Einkaufssituation modellieren sie die Äußerungen des Kindes, indem sie mathematische Terme angeben. Hat das Kind modelliert? Auch eine andere Interpretation ist möglich. Das Kind weiß den Preis von drei Kokosnüssen; während das Kind mental drei weitere Kokosnüsse hinzunimmt, berechnet es den Zwischenpreis „210“; es vergleicht mental die bisherige Menge von Kokosnüssen mit der Zielmenge von zehn Kokosnüssen, mit dem Ergebnis, dass noch vier Kokosnüsse fehlen, usw. Gemäß dieser Interpretation denkt das Kind an einzelne Sachverhalte und an Preise als Eigenschaften der Sachverhalte, und rechnet parallel zum mentalen Operieren mit Kokosnüssen. Sehen wir als Mathematikexperten in die Tätigkeiten von Kindern ein mathematisches Modell hinein, das beim Kind mental nicht existiert? Als Experten denken wir eher an Größen bzw. (Maß-)Zahlen und verstehen die einzelnen Sachverhalte nur als Repräsentanten, während das Kind an einzelne Sachverhalte denken mag, und die Größen bzw. (Maß-)Zahlen nur als deren Eigenschaften versteht.

2. Kritik am Modellierungskreislauf

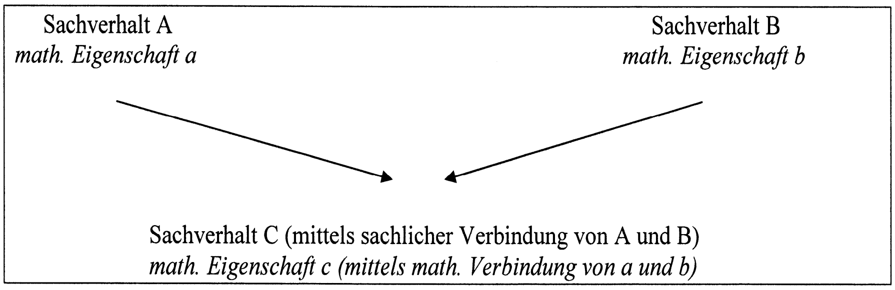
Gemeinsam ist den Varianten des Modellierungskreislaufes die Trennung zwischen der Realität und der Mathematik. Der Lernende deute zunächst die Aufgabenstellung als eine reale Situation. Später gehe er in den Bereich der Mathematik über, bis er mit einem mathematischen Resultat wieder in den Bereich der Realität wechsele (s. z. B. Blum & Leiß 2005).

Empirische Studien belegen, dass Lernende in ihren tatsächlichen Bearbeitungen von „Modellierungsaufgaben“ noch vor dem Erreichen des mathematischen Resultates vielfältige Beziehungen zwischen der Realität und der Mathematik berücksichtigen (z. B. Peter-Koop 2003, Riebel 2010, Borromeo Ferri 2011). Diese Studien gehen in ihren Erweiterungen des Kreislaufschemas und in ihrer Kritik an dem Schema weiter von der Trennung zwischen Realität und Mathematik aus. Der Bereich zwischen Realität und Mathematik bleibt ein „weißer Fleck“, der nur Übergänge darstellen läßt.

Andere empirische Studien zum Modellieren stellen die Trennung zwischen Realität und Mathematik grundsätzlicher in Frage (z. B. Schwarzkopf 2007, Meyer & Voigt 2010). Hier sei nur die „Realsituation“ problematisiert. Das oben erwähnte Kind befindet sich beim Verkauf von Kokosnüssen in einer echten Realsituation. Dagegen besitzt der Mathematikunterricht seine eigene Realität. Selbst wenn Schüler eine Klassenfahrt planen, müssen sie nicht mit ihrem Taschengeld dafür gerade stehen, wenn sie sich bei den Kosten verrechnen. In der Schule gilt nicht der Ernst des Lebens wie auf der Straße – aus guten Gründen. Die Schüler können davon ausgehen, dass es um das Lernen (des Anwendens) von Mathematik geht.

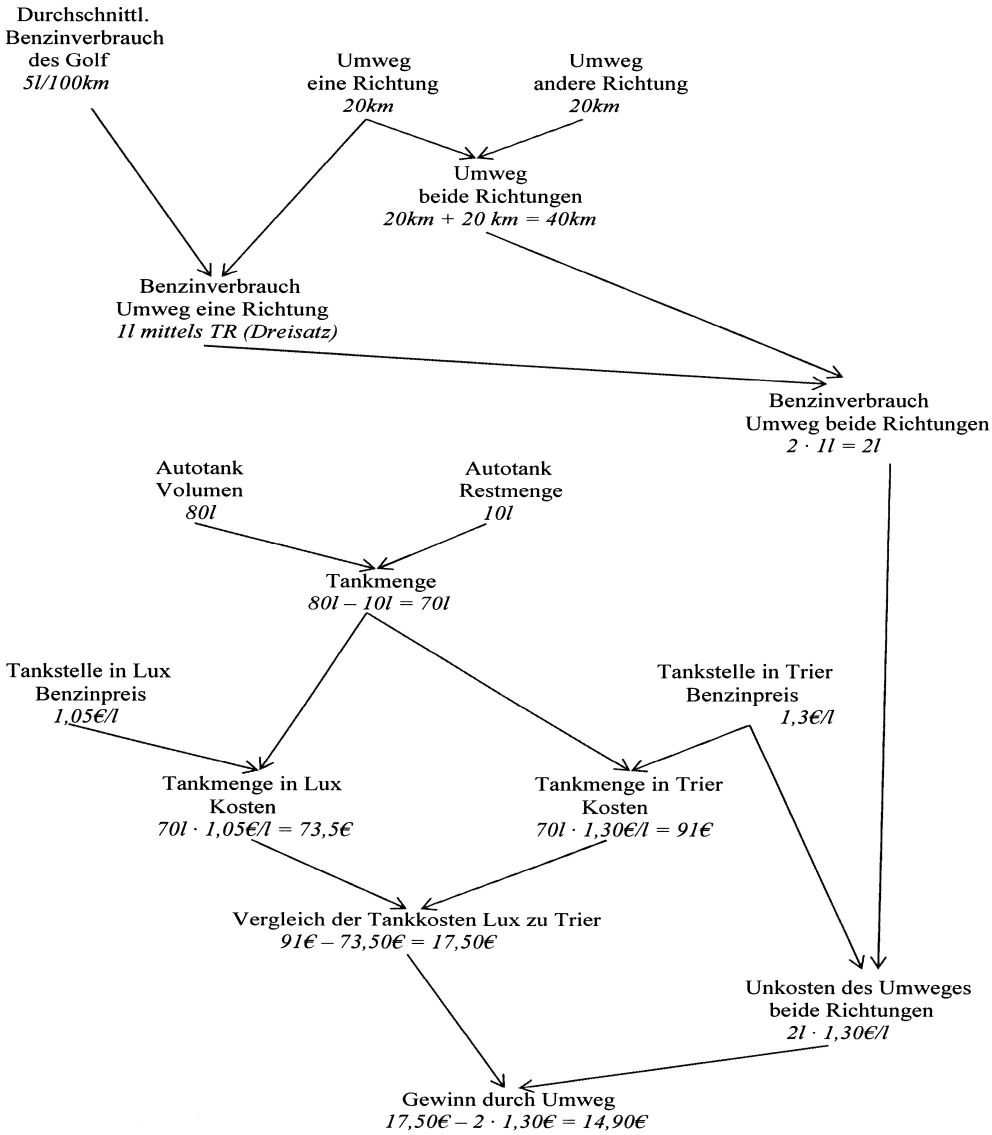
3. Alternative Rekonstruktion von Modellierungsprozessen

M. Meyer, A. Söhling und ich interviewten Lernende aus dem Bereich der SEK I, während sie „Modellierungsaufgaben“ bearbeiteten. Anhand der Transkripte ließen sich die Lösungswege auf eine alternative, schlichtere Weise rekonstruieren. Dabei sind die einzelnen Sachverhalte direkt mit Größen verbunden. Ebenso sind die sachlichen Beziehungen zwischen den Sachverhalten direkt mit den mathematischen Operationen verbunden. Das einzelne Element dieser Rekonstruktion stellt folgende Abbildung dar:



Zur Konkretisierung dient hier ein Lösungsweg zur Tanken-Aufgabe: „Herr Stein wohnt in Trier, 20km von der Grenze zu Luxemburg entfernt. Er fährt mit seinem VW Golf zum Tanken nach Luxemburg, wo sich direkt hinter der Grenze eine Tankstelle befindet. Dort kostet der Liter Benzin nur 1,05€, im Gegensatz zu 1,30€ in Trier. Lohnt sich die Fahrt für Herrn Stein? Begründe deine Antwort.“ (CD-Rom zu Blum u.a. 2006)

Der Schüler (9. Klasse, Gymnasium) löst die Aufgabe wie folgt. Der zeitliche Verlauf entspricht der Leserichtung (Transkript beim Autor erhältlich):



Diese Art der Rekonstruktion von Lösungswegen ist erst dann zu modifizieren, wenn der Lernende auf rein mathematische Weise ein Objekt konstruiert, das für Ihn zunächst nicht als ein Sachverhalt repräsentiert ist oder das als ein solcher in dem Sachzusammenhang nicht repräsentierbar ist.

4. Fazit

Diese Trennung von Realität und Mathematik und die Folge von Schritten im Modellierungskreislauf bilden ein Artefakt. Auch die normative Funktion des Kreislaufes ist fraglich. Soll man beispielsweise die Modellierungskompetenz als Summe von Einzelkompetenzen (entsprechend den einzelnen Schritten aus dem Kreislaufschema) ansehen oder eher als Koordination von Kompetenzen in jedem Schritt nach obigem Schema? Und von welcher Art ist die mathematische Kompetenz?

Das Theoriedefizit zum Bereich des Modellierens ist nicht leicht zu beheben, weil mit der Frage nach dem Verhältnis von Realität und Mathematik philosophische Fragen aufgeworfen werden (s. Burscheid & Struve 2009). Diese Fragen stellen sich, wenn man mit „Modellierungsaufgaben" auf Realitätsbezüge der Mathematik und zugleich auf die Trennung von Realität und Mathematik Wert legen will.

Literatur

Blum, W., Leiß, D. (2005): Modellieren im Unterricht mit der „Tanken"-Aufgabe. In: mathematik lehren, 128, 18-21.

Blum, W., Drüke-Noe, Ch., Hartung, R., Köller, O. (Eds.) (2006): Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen. Berlin: Cornelsen.

Burscheid, H.J., Struve, H. (2009): Mathematikdidaktik in Rekonstruktionen. Ein Beitrag zu ihrer Grundlegung.Hildesheim: Franzbecker.

Borromeo Ferri, R. (2011): Wege zur Innenwelt des mathematischen Modellierens - Kognitive Analysen von Modellierungsprozessen im Mathematikunterricht. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Carraher, T.N., Carraher, D.W., Schliemann, A.D. (1985): Mathematics in the streets and in schools. In: British Journal of Developmental Psychology, 3, 21-29.

Meyer, M., Voigt, J. (2010): Rationale Modellierungsprozesse. In: B. Brandt, M. Fetzer, M. Schütte (Eds.): Auf den Spuren interpretativer Unterrichtsforschung in der Mathematikdidaktik. Münster: Waxmann, 117-148.

Peter-Koop, A. (2003): „Wie viele Autos stehen in einem 3-km-Stau?" Modellierungsprozesse beim Bearbeiten von Fermi-Aufgaben in Kleingruppen. In: S. Ruwisch & A. Peter-Koop (Eds.): Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule. Offenburg: Mildenberger, 111-130.

Riebel, J. (2010): Modellierungskompetenzen beim mathematischen Problemlösen. Inventarisierung von Modellierungsprozessen beim Lösen mathematischer Textaufgaben und Entwicklung eines diagnostischen Instrumentariums. Dissertation, Universität Koblenz-Landau, Fachbereich Psychologie, Landau.

Schwarzkopf, R. (2007). Elementares Modellieren in der Grundschule. In: A. Büchter u.a. (Eds.): Realitätsnaher Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker, 95-105.