

Dirk BROCKMANN-BEHNSEN, Hannover

Wie steigert man die Problemlöse- und Argumentationskompetenz? Ergebnisse der HeuRekAP Studie

1. Hintergrund

Argumentieren und Problemlösen sind grundlegende mathematische Tätigkeiten und sollten entsprechend im Unterricht abgebildet werden. Daher stellt sich die Frage, wie ein Unterricht gestaltet werden sollte, dessen Ziel in einer Steigerung der Schülerkompetenzen in diesen Bereichen besteht (vgl. z. B. Herbst 2002, S. 283f.).

Boero (1999) beschreibt sechs Phasen des Beweisprozesses, beginnend mit der Untersuchung eines Sachverhaltes und Aufstellen einer Vermutung, dem Formulieren einer Aussage gemäß fachlicher Konventionen, dem Erforschen des Umfeldes der Vermutung, der Auswahl und Aneinanderreihung von Argumenten in eine deduktive Reihe, der publizierbaren Verschriftlichung dieser deduktiven Reihe und schließlich – insbesondere für den schulischen Bereich zu weit gehend – dem Erreichen mathematischer Strenge. Nach Reiss (2002, S. 9) ergibt sich eine „wesentliche Schwierigkeit [...] nun daraus, dass in einem Prozess der Beweiskonstruktion, so wie ihn Boero beschreibt, insbesondere die explorativen Schritte für Schülerinnen und Schüler (und wahrscheinlich auch für viele Mathematiklehrer) weitgehend intransparent bleiben“. Ein Ziel des HeuRekAP-Projektes war es daher, die Schülerinnen und Schüler zu möglichst vielen unterrichtlichen Gelegenheiten die Phasen des Beweisprozesses eigenständig durchlaufen zu lassen. Eine umfassende Beschreibung einer solchen Phasenfolge zum Unterrichtsthema „Satz des Thales“ findet sich bei Brockmann-Behnsen (2013).

Bezüglich eines erfolgreichen Heuristentrainings fordert König (1992, S. 24) ein „explizites Abheben von methodologischen Erkenntnissen“, was im HeuRekAP-Projekt durch separate Unterrichtsphasen realisiert wurde.

2. Forschungsfragen/ -hypothesen

Der Forschungsschwerpunkt für die in diesem Artikel beschriebene Untersuchung liegt in der Auswertung von Schülerprodukten zu verschiedenen Aufgaben vor und nach dem Heuristen- und Argumentationstraining des HeuRekAP-Projektes. Konkret wurde untersucht, in welchem Maße Argumente von den Schülerinnen und Schülern mathematisch korrekt verknüpft wurden. Zu Beginn der Studie sollten bei den Produkten der parallelisierten Stichproben aus Trainings- und Vergleichsgruppe wenig oder keine Unter-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 245–248).
Münster: WTM-Verlag

schiede zu sehen sein, nach dem Training sollten sich bei der Vergleichsgruppe leichte und bei der Trainingsgruppe deutliche Verbesserungen in der Vollständigkeit der Argumentationen zeigen.

3. Methodologie

Im Verlauf des HeuRekAP-Projektes wurden vier Klassen eines hannoveraner Gymnasiums über einen Zeitraum von eineinhalb Jahren untersucht, zwei davon waren mathematisch-naturwissenschaftliche Profilklassen, die beiden anderen nicht. Je eine Klasse mit und ohne Profil wurde über den Gesamtzeitraum der Studie vom Autor unterrichtet. Dieser Unterricht umfasste auch ein im Rahmen des Projektes entwickeltes Heuristiken- und Argumentationstraining.

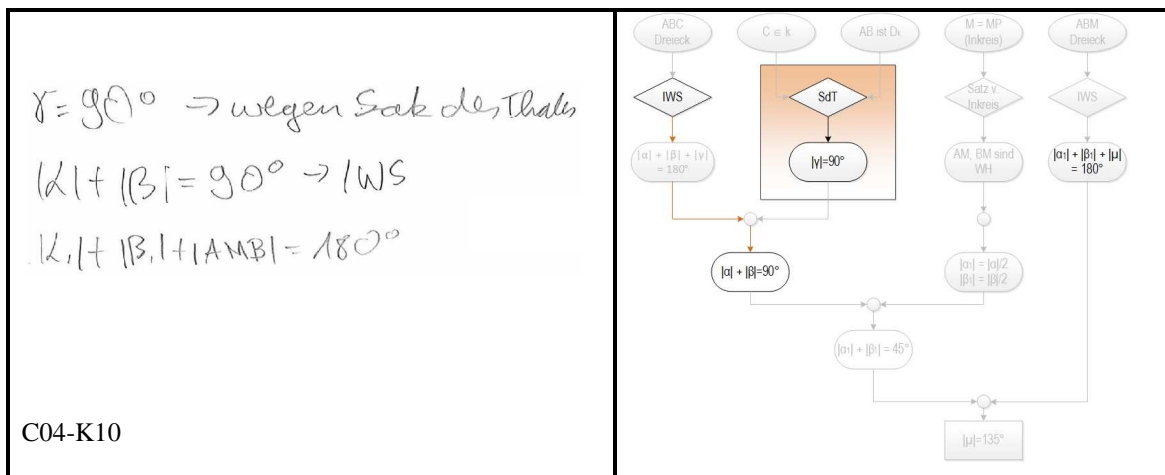
Für die hier beschriebenen Untersuchungen wurden zwei parallelisierte Stichproben von je 15 Schülerinnen und Schülern

	MN-Profil	Kein Profil
Training	ET (Klasse D)	IT (Klasse C)
Kein Training	V₁ (Klasse A)	V₂ (Klasse B)

aus den mathematisch-naturwissenschaftlichen Profilklassen D (mit explizitem Heuristiken- und Argumentationstraining „ET“) und A (Vergleichsklasse V₁ ohne Training) ausgewählt.

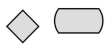
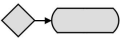
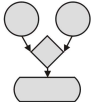
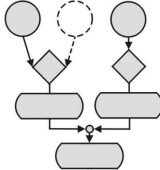
Erhoben wurden die schriftlichen Bearbeitungen aller 30 Probanden von zwei Aufgaben vor Beginn der Studie („Raute 1“ und „Winkel 1“) und von drei Aufgaben zum Ende der Studie („Raute 2“: ähnlich „Raute 1“, erneut die Ankeraufgabe „Winkel 1“ und die TIMSS-Aufgabe K10 als komplexe Aufgabe):

Die Bearbeitungen der Probanden wurden im Sinne der Vergleichbarkeit und Kategorisierbarkeit in einem ersten Schritt mithilfe gerichteter Multi-Graphen sensu König (1996, S. 17) in ein strukturiertes und standardisiertes Repräsentationsformat überführt. Nachfolgend wird dies exemplarisch für die Bearbeitung des Probanden C04 und die Aufgabe K10 dargestellt:



Im Produkt genannte Startgrößen werden in Kreise bzw. Ovale geschrieben, genannte Zielgrößen in Quadrate bzw. Rechtecke, Teilziele (nach König 1992, S. 25 „Feststellungen“) in eine Mischform aus Oval und Rechteck und Hilfsmittel („Sätze, Definitionen, Formeln, Umformungsregeln“, ibid.) in Rauten. Beschriebene Folgerungen werden durch Pfeile repräsentiert.

In einem zweiten Schritt wurde die Vollständigkeit des Argumentationsweges an Hand des erstellten Lösungsgraphen beurteilt. Dazu wurde ein sechstufiges, ordinalskaliertes Kategoriensystem entwickelt:

Kat.	Kurzbeschreibung	Repräsentation im LG
K0	Kein Ansatz Keine Bearbeitung oder Nennung nur vollständig sachfremder Dinge	
K1	Atome Unzusammenhängende Nennung von geeigneten Zwischenziele bzw. Hilfsmitteln	
K2	Moleküle Mathematisch korrekte Verknüpfung von Teilzielen und/ oder Hilfsmitteln	
K3	Deduktive Keimzellen Mindestens eine vollständige und korrekte mathematische Schlussfolgerung	
K4	Deduktiver Torso Mindestens eine mathematisch korrekte Zusammenführung zweier mathematischer Schritte zu einem neuen Teilziel	
K5	Deduktiver Körper Eine im Wesentlichen vollständige deduktive Schlusskette	Im wesentlichen vollständiger LG

4. Ergebnisse

Es ergaben sich vergleichbare Ergebnisse beider parallelisierter Gruppen bezüglich der Mediane erreichter Kategorien bei den Bearbeitungen der Aufgaben vor Beginn der Studie, aber signifikante Unterschiede bei den Bearbeitungen der drei Aufgaben zum Ende der Studie ($\chi^2 = 19,72$, $p < 0,0001$):

	Raute 1 (Pre)	Raute 2 (Post)	Winkel 1 (Pre)	Winkel 1 (Post)	K10 (Post)
ET: Median (Quartilsabstände)	2 (1)	4 (1)	2 (3)	4 (0,5)	2 (0,5)
V₁: Median (Quartilsabstände)	2 (1)	1 (2)	2 (2)	2 (2)	1 (1)

Vergleicht man die Entwicklung der Trainingsklasse ET bezüglich der erreichten Kategorien zwischen den beiden Pre-Aufgaben Raute 1 und Winkel 1 und den beiden zugehörigen Post-Aufgaben Raute 2 und Winkel 1 (Post), so zeigt sich, dass nur 5 von 30 Produkten in derselben oder einer schlechteren Kategorie verblieben, wogegen 21 Produkte sich um zwei oder mehr Kategorien verbesserten. In der Vergleichsklasse ergibt sich ein nahezu inverses Bild: 18 der 30 Produkte verblieben in derselben Kategorie oder verschlechterten sich gar, lediglich 5 Bearbeitungen stiegen um zwei oder mehr Kategorien.

5. Diskussion/ Ausblick

Im Rahmen dieses Artikels wurden die Produkte von zwei parallelisierten Gruppen von je 15 Schülerinnen und Schülern vor Beginn und zum Ende eines Zeitraumes von eineinhalb Jahren untersucht. Zur Untersuchung der Argumentationsqualität wurde ein System entwickelt, mit dessen Hilfe die explizierten Einzelheiten einer Argumentationskette und deren Verknüpfung kategorisiert werden kann. Literaturgemäß zeigten sich vor Beginn der Studie bei beiden Gruppen eher schwache Leistungen bezüglich der Vollständigkeit der verschriftlichten Argumentationen. Die über den beschriebenen Zeitraum trainierte Gruppe zeigte aber zum Ende der Studie signifikant bessere Leistungen.

Weitere Untersuchungen zur Effektivität des Heuristiken- und Argumentationstrainings werden folgen. Außerdem müssen die Untersuchungen auf die zweite Trainingsklasse C und die Vergleichsklasse V_2 einerseits sowie auf weitere erhobene Aufgaben andererseits ausgeweitet werden.

Literatur

- Brockmann-Behnsen, D. (2013). The process of proving Thales' Theorem. In: Scottish Mathematical Council Journal 43 (2013), 26-31
- Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematical education. International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, Juli / August 1999
- Herbst, P. (2002): Establishing a Custom of Proving in American School Geometry: Evolution of the Two-Column Proof in the Early Twentieth Century, in: Educational Studies in Mathematics 49: 283–312, 2002, Kluwer Academic Publishers.
- König, H. (1992): Einige für den Mathematikunterricht bedeutsame heuristische Vorgehensweisen, in: Der Mathematikunterricht Jg. 38, 3/1992
- König, H. (1996): Heuristik beim Lösen problemhafter Aufgaben aus dem außerunterrichtlichen Bereich, Bezirkskomitee Chemnitz zur Förderung math.-nat. begabter und interessierter Schüler, Chemnitz
- Reiss, K. (2002). Argumentieren, Begründen, Beweisen im Mathematikunterricht. Projektserver SINUS. Bayreuth. Universität