

Jana KOLTER, Potsdam

So schwer kann das mit dem Bündeln doch nicht sein: Vorstellungen und Schwierigkeiten Studierender zum Bündelungsprinzip

1. Einleitung

„Für unser dezimales Stellenwertsystem sind zwei Ideen grundlegend, nämlich die Idee der Bündelung und die Idee des Stellenwertes“ (Padberg & Benz, 2011, S. 84). Es ist nicht nur für das Lesen und Schreiben von Zahlen wichtig, den Aufbau der Zahldarstellung zu verstehen; spätestens bei den Normalverfahren zu den Grundrechenarten wird auf die Bündelstruktur zurückgegriffen. Dass (angehende) Grundschullehrer/innen die Stellenwertsysteme grundlegend verstanden haben müssen, um Zahldarstellungen und die Rechenverfahren nicht nur anwenden und „vorzeigen“ sondern erklären und vermitteln zu können, versteht sich von selbst. Welche Kompetenzen Studierende tatsächlich zum Stellenwertsystem (mit den Ideen des Stellenwerts in der Zahldarstellung und der Bündelung) haben, wie sie sich entwickeln und welche Hürden dabei zu meistern sind, wird im hier ausschnittsweise beleuchteten Dissertationsprojekt untersucht¹. Es zeigt sich, dass Bündeln als „echter Prozess“ für die meisten Studierenden nicht mehr präsent ist und dass sich viele den Aufbau der Zahldarstellung und insbesondere die Zusammenhänge zwischen Bündeln und Stellenwerten sowie zur Zahldarstellung mit Ziffern wieder neu erschließen müssen.

2. Bündeln als zentraler Prozess der Grundschul-Arithmetik

Zum Bündeln gibt es ein weites Netz aus Begrifflichkeiten, die auf verschiedenen Ebenen beschreiben, was Bündeln ist und umfasst. Man liest von konkreten und symbolischen Bündelungen als Ergebnisse von Bündelungsprozessen, welche als Vorgänge, die dem Bündelungsprinzip folgen, verstanden werden (z.B. Rödler, 2006) und deren Durchführung auf enaktiver, ikonischer oder symbolischer Ebene erfolgen kann. Diese Durchführung wird entweder konkret mit „echtem“ Material, mit Zeichnungen, mit Rechnungen und Symbolen oder später mental mit „vorgestelltem“ Material repräsentiert. Gerster und Schultz (2000) beschreiben die Verinnerlichung der konkreten Handlungen zu geistigen Aktivitäten als wichtigen Schritt beim Erwerb *mathematischer Vorstellungen*. Mit diesen soll dann – und das gilt umso mehr für (angehende) Lehrpersonen – ein *Übersetzen* zwischen enaktiver, ikonischer und symbolischer Darstellungsebene mög-

¹ Angegliedert an das Projekt KLIMAGS des khdm, www.khdm.de
In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 639–642).
Münster: WTM-Verlag

lich sein. Das Ergebnis eines Bündelungsprozesses ist eine *Zahldarstellung*, die durch Anordnungen von realen oder gezeichneten Objekten in Bündeln oder durch die Potenz- oder Ziffernschreibweise angegeben wird. Durch die Durchführung des Bündelns, die Verinnerlichung der Handlungen und die Thematisierung der verschiedenen aus dem Bündelprozess resultierenden Zahldarstellungen sollen *Grundvorstellungen* zu Zahlen ausgebaut werden, die dann die Übersetzung zwischen verschiedenen Zahldarstellungen ermöglichen (Wartha & Schulz, S. 6).

3. Empirische Untersuchung – Einbettung, Fokus, Methode

Der vorliegende Beitrag dokumentiert einen Ausschnitt eines Promotionsprojektes, welches sich mit Grundschul-Studierenden beschäftigt und anhand materialbasierter Interviews erforscht, wie die angehenden Mathematiklehrer/innen zu ihren Kompetenzen zum Bündeln (als Prozess) und zu verschiedenen Zahldarstellungen kommen. Dazu wurden zu vier Zeitpunkten im Studium (T1: Studienbeginn, N=15; T2: Ende 1. Semester, Fach-Arithmetik, N=14; T3: Ende 2. Semester, Didaktik der Arithmetik, N=10; T4: am Ende des gesamten Studiums, N=4) Interviews geführt, in denen u.a. Bündelungsvorgänge im Zehnersystem, auf welchem der Fokus dieses Beitrags liegt, und im Vierersystem mit unstrukturiertem Bündelmaterial (lose Deko-Steinchen) durchgeführt und erklärt werden sollten. Somit sollten neben dem „Fachwissen“ auch die Kompetenzen, dieses in Handlung umzusetzen und diese zu beschreiben sowie das Erzeugen von und Übersetzen zwischen verschiedenen Zahldarstellungen erhoben werden.

Im Verlauf des Interviews wurden mit der Frage, mit welchem Vorgang man Kindern den Aufbau der Zahldarstellung mit der 10 als „Strukturierungszahl“ nahebringen könnte, zunächst die Ideen der Testpersonen (TP) zum Bündeln erfragt. Es war die Hoffnung, dass trotz der Offenheit der Frage und ohne Prompt in Richtung des Bündelns einige Testpersonen von sich aus eine Bündelungshandlung 1) als adäquaten Vorgang erkennen / erinnern und 2) in der Lage sind, diesen verbal zu beschreiben. Entsprechend der Antwort folgten die weiteren Aufträge:

- Entsprechend der geschilderten Vorgang einem Bündelungsvorgang (zumindest in Ansätzen), wurden 123 Dekosteine ausgehändigt und die Probanden gebeten, den beschriebenen Vorgang am Material zu demonstrieren.
- Wies der beschriebene Vorgang keine Bezüge zum Bündeln auf, wurden 123 Deko-Steine ausgelegt und die TP gebeten, diese zu zählen.

- Waren beim Zählen keinerlei Bündel-Ansätze zu erkennen, wurde das Interview an dieser Stelle beendet.
- Wurde beim Zählen eine Orientierung an (Zehner-)Bündeln offensichtlich, wurde dies den Probanden bewusst gemacht und dann im Interview fortgeführt.

Die Auswertung der Handlungen und Antworten erfolgt aufgabenweise induktiv in Anlehnung an die Vorgehensweisen der Grounded-Theory-Methode (Strübing, 2008; für genauere Informationen und erste Kategorie-Bildungen siehe Schneider & Kolter, 2014).

4. Ergebnisse

Insgesamt wurden sechs Personen (drei zu T1, je einmal T3 und T4) gebeten, die Steine zu zählen, da der von Ihnen verbal beschriebene Vorgang zur Verdeutlichung der sukzessiven Multiplikation mit 10 keine Bündelaktivitäten beinhaltet hatte. Fünf von ihnen wählten spontan die Zählstrategie, Zehnerhäufchen zu legen. Eine Bündelung zum Hunderter fand dann nicht mehr statt, da am Resultat „12 Zehnerpäckchen und drei einzelne Steine“ die Anzahl bereits erkannt wurde. Von den sechs waren eine Testperson aus T1 und die aus T4 in der Lage, auf Nachfrage die Ziffern der 123 anhand der Steine zu erläutern.

Wie erwartet, zeigen sich große Unterschiede zwischen den verschiedenen Erhebungszeitpunkten. Je weiter die Testpersonen im Studium fortgeschritten sind, desto besser können sie Bündelungsvorgänge durchführen, die Schritte sowie die erzeugte Zahldarstellung kommentieren und den Bezug zu Ziffern- oder Potenzdarstellung herstellen. Es zeigen sich dabei aber sowohl innerhalb der Erhebungszeitpunkte als auch übergreifend Phänomene, von denen hier einige dargelegt werden. Die nachfolgende Tabelle zeigt drei Phänomene des Aufgabenbereichs „Zeigen des Vorgangs“ und führt den inhaltlichen Kern einer Beobachtung sowie die Häufigkeiten des Auftretens je Erhebungszeitpunkt auf. Aus Platzgründen wird nur eine Auswahl von Phänomenen präsentiert, die Abweichungen vom „klassischen“ Bündelalgorithmus oder sonstige Auffälligkeiten zeigt.

Inhaltlicher Kern des Phänomens	T1	T2	T3	T4
Bündelung nur bis zur Zehnerstufe. Durch Multiplizieren von 12 (Bündel) mit 10 (Steine pro Bündel) erkennen die TP die Anzahl und beenden die Handlung.	5	3	0	1
Bezeichnung von drei Einern als „ein Päckchen“ / „ein Dreier“ oder von zwei Zehnern als „ein Zwanziger“.	2	2	1	0

Hunderter, Zehner und Einer werden an den Steinen gezeigt, danach scheitert die Zuordnung von Steinchen-Bild zur Zifferndarstellung oder sie ist konfus.	2	0	1	0
--	---	---	---	---

9 der 43 Testpersonen beenden die Handlung nach der ersten Bündelstufe, indem Sie ausrechnen, dass es 123 Steine sind (obwohl nicht nach der Anzahl gefragt war). Nur 5 von Ihnen können auf Nachfrage den Hunderter bilden und einen Zusammenhang zwischen Steinen und Zifferndarstellung herstellen. Ebenfalls Schwierigkeiten beim „Zuordnen“ von Bündeln zu Ziffern haben drei Studierende. Insb. wenn die zehn Zehner nicht kompakt zu einem Hunderter zusammengelegt werden, sondern die einzelnen „inneren Zehner“ des Hunderters noch sichtbar sind, fällt es ihnen schwer, den *einen* Hunderter zu sehen. Fünf Testpersonen identifizieren den Stellenbeitrag (3 bzw. 20) auf einer Stelle und können diesen nicht in Stellenwert (1 bzw. 10) und Stellenbelegung (3 bzw. 2) zerlegen.

Insgesamt zeigt sich, dass – schon im Dezimalsystem! – Lücken bei einigen Studierenden vorhanden sind, was die Bündelungshandlung an sich und vor allem den adäquaten Wechsel der Darstellung in die Ziffernschreibweise angeht, die offenbar durch die theoretische Fach- und Didaktik-Ausbildung in der Universität nicht vollständig ausgeräumt werden konnten. Den Erkenntnissen aus der Schuldidaktik folgend (z.B. Rödler, 2006, S.152), scheint es daher auch an der Universität notwendig zu sein, fachliche Zusammenhänge, Darstellungen und Darstellungswechsel tatsächlich explizit zu behandeln und bewusst zu machen, um bei den angehenden Lehrern adäquate Kompetenzen zum Thema Stellenwertsysteme zu erreichen.

Literatur

- Gerster, H.-D. & Schultz, R. (2000). *Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht: Bericht zum Forschungsprojekt Rechenschwäche - Erkennen, Beheben, Vorbeugen*. www.freidok.uni-freiburg.de/volltexte/1397.
- Padberg, F., & Benz, C. (2011). *Didaktik der Arithmetik: Für Lehrerbildung und Lehrerfortbildung*. Heidelberg: Springer.
- Rödler, K. (2006). *Erbsen, Bohnen, Rechenbrett: Rechnen durch Handeln*. Seelze-Velber: Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung.
- Schneider, M. & Kolter, J. (2014). *Kategorisierung mathematischer Bündelungsprozesse von Grundschullehrerstudierenden*. <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hebis:34-2014012444809>.
- Strübing, J. (2008). *Grounded Theory - Zur sozialtheoretischen und epistemologischen Fundierung des Verfahrens der empirisch begründeten Theoriebildung*. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.
- Wartha, S. & Schulz, A. *Aufbau von Grundvorstellungen (nicht nur) bei besonderen Schwierigkeiten im Rechnen*. Kiel: IPN.