Michael MARXER, Gerald WITTMANN, Freiburg

Aufgabenadäquates Rechnen bei Dezimalbrüchen oder Warum vermeintlich einfache Aufgaben so fehlerträchtig sind

In diesem Beitrag werden in Bezug auf das flexible Rechnen mit Dezimalbrüchen zwei Aspekte beschrieben: Einerseits typische Fehler von Schülerinnen und Schülern, die auf ein nicht aufgabenadäquates Arbeiten hindeuten, und andererseits Ansätze zur Entwicklung von Aufgaben, die das flexible Rechnen mit Dezimalbrüchen fördern können.

1. Typische Fehler beim Multiplizieren von Dezimalbrüchen

Typische Fehler beim Rechnen mit Dezimalbrüchen lassen sich exemplarisch am Beispiel der Aufgabe $2{,}4 \cdot 0{,}5$ illustrieren. In einer eigenen Erhebung löste weniger als die Hälfte der betreffenden Schülerinnen und Schüler an Haupt-, Werkreal- und Realschulen in Baden Württemberg diese vermeintlich einfache Aufgabe richtig. Es kann ein breites Spektrum an Fehlerphänomenen und -ursachen rekonstruiert werden:

- Im Bereich der Einmaleinsfehler treten häufigen Fehler beim Rechnen mit 0 auf (Nullfehler), beispielsweise $2 \cdot 0 = 2$ oder $2{,}4 \cdot 0 = 2{,}4$.
- Das Komma-trennt-Muster zeigt sich in $2{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}20$ oder auch in $2{,}4 \cdot 0{,}5 = 2{,}20$, dort in Verbindung mit einem Nullfehler.
- Das Ergebnis 12,0 weist darauf hin, dass das Setzen des Kommas im Anschluss an die Rechnung $24 \cdot 5 = 120$ so erfolgt, dass das Ergebnis wie die beiden gegebenen Faktoren eine Nachkommastelle aufweist.
- Hinter dem Ergebnis 0,12 kann die (richtige) Überlegung stehen, dass das Ergebnis zwei Nachkommastellen besitzen muss, es wird aber die die Endnull nicht beachtet oder falsch behandelt.
- Ein „Ziffernrechnen“ ohne jegliche Beachtung von Stellenwerten ist exemplarisch in $2{,}4 \cdot 0{,}5 = 2{,}0$ zu erkennen (Komma-trennt-Muster, Nullfehler, auf eine Nachkommastelle zielende Kommasetzung).

Die Lösungen deuten darauf hin, dass nur wenige die Aufgabe $2{,}4 \cdot 0{,}5$ inhaltlich lösen („die Hälfte von ...“) und damit die Besonderheiten der gegebenen Zahlen nicht nutzen (vgl. Marxer & Wittmann 2013). Stattdessen rechnen viele Schülerinnen und Schüler schriftlich oder halbschriftlich, was sich als fehleranfällig erweist. Die Kommasetzung erfolgt auch aufgrund von Oberflächenmerkmalen, so nach Einheitlichkeit („alle Zahlen mit einer Nachkommastelle“) oder einer vereinfachten Regel („wenn zwei Zahlen mit einer Nachkommastelle multipliziert werden, hat das Ergebnis zwei

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 795–798). Münster: WTM-Verlag

Nachkommastellen“). Ferner werden Verfahrensschritte in wenig sinnvoller Weise und ohne Bezug zum Stellenwertystem kombiniert („Ziffernrechnen“).

2. Zahlenblick bei Dezimalbrüchen

Die Aufgabe 2,4 · 0,5 belegt, dass es nicht sinnvoll ist, stets schematisch entsprechend den jeweils bekannten kalkülhaften Verfahren zu rechnen. Stattdessen ist eine *aufgabenadäquate Vorgehensweise* angebracht. Sie zeichnet sich insbesondere aus durch

- das Erkennen und Bewerten der jeweils spezifischen Zahleigenschaften und Zahlbeziehungen einer Aufgabe im Hinblick darauf, ob sie für die Lösung hilfreich sein können,
- das gezielte Wählen von Lösungswegen, die den aufgabenspezifischen Gegebenheiten gerecht werden, indem die jeweils besonderen Zahleigenschaften und Zahlbeziehungen einer Aufgabe genutzt werden.

Ein aufgabenadäquates Rechnen ist ein Ziel der *Förderung des Zahlenblicks* der Schülerinnen und Schüler (vgl. Marxer & Wittmann 2011; 2012, 2013), in Anlehnung an entsprechende Konzepte aus dem Mathematikunterricht der Grundschule (vgl. Schütte 2004; 2008; Rathgeb-Schnierer 2006). Die Förderung des Zahlenblicks zielt weniger auf das Rechnen als solches, denn auf das *Reflektieren von Rechenwegen*, also auf eine Meta-Ebene zum eigentlichen Rechnen. Ein Zahlenblick entwickelt sich nicht automatisch durch das Bearbeiten („Rechnen“) *vieler* Aufgaben, sondern benötigt gezielte Impulse, „spezielle Anreize, den Rechendrang aufzuhalten und den Blick auf die Art der Aufgabe zu lenken“ (Schütte 2004, S. 144). Geeignete Aufgabenformate werden in Abschnitt 3 vorgestellt.

Diesem Ansatz liegt die Überzeugung zugrunde, dass das *Rechnen* im engeren Sinne auch bei Dezimalbrüchen nur eine geringe Alltagsbedeutung besitzt. Es wird schon bald vom Taschenrechner, dem Smartphone oder einer Tabellenkalkulation übernommen. Deshalb wird es hier anders akzentuiert: *Das Rechnen mit Dezimalbrüchen bildet den Anlass, dass Schülerinnen und Schüler die Eigenschaften der für sie neuen Zahlen erfahren können.* Beim Rechnen beschäftigen sie sich mit Dezimalbrüchen, sie können deren Eigenschaften erfahren und verstehen. Insbesondere können sie die Verbindungen zu gemeinen Brüchen und die dahinter stehenden Grundvorstellungen vertiefen.

3. Aufgabenformate

Um dieses Ziel zu erreichen, bedarf es Aufgabenformate, die den Zusammenhang von gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen immer wieder herstellen und das Bewusstsein dafür schärfen, dass es sich lediglich um unterschiedliche Darstellungen derselben Zahl handelt. Besonders eingängig sind dabei solche Aufgaben, bei denen das Wechseln zwischen den Darstellungen Vorteile erbringt. Wenn die Darstellung „passt“, lässt sich das Ergebnis oft schon auf den ersten Blick „sehen“ oder kann einfacher ermittelt werden als mit dem Standardverfahren. Das Nutzen von Zahl- und Aufgabenbeziehungen kann also einen deutlichen (Zeit-)Gewinn bringen und gegenüber dem ziffernweisen Rechnen den Blick für die Größenordnungen von gegebenen Zahlen und Ergebnissen bewahren.

Beispiel 1: *Welche dieser Aufgaben haben das gleiche Ergebnis?*

$77\,777 \cdot 0{,}5$	$77\,777 \cdot \frac{1}{3}$	$77\,777 : 5$	$77\,777 \cdot 2$
$77\,777 \cdot 0{,}2$	$77\,777 : 2$	$77\,777 \cdot \frac{1}{5}$	$77\,777 \cdot 5$
$77\,777 \cdot 0{,}3$	$77\,777 : 3$	$77\,777 \cdot \frac{1}{2}$	$77\,777 \cdot \frac{3}{10}$

Das Suchen ergebnisgleicher Aufgaben beruht hier auf dem Erkennen wirkungsgleicher Operationen, weil der erste Faktor bei allen Aufgaben derselbe ist. Der Wechsel zwischen den Darstellungsformen bei den Brüchen bringt hinsichtlich des Lösungsaufwands entscheidende Vorteile gegenüber dem Standardalgorithmus. Dabei macht der relativ große Faktor 77 777 die schriftliche Multiplikation unattraktiv. Wenn auch der Einsatz des Taschenrechners vermieden werden soll, kann diese Zahl auf 12 Stellen vergrößert werden.

Beispiel 2: *Aufgaben nach günstigen Lösungswegen sortieren*

$0{,}5 \cdot 2$	$48 : 0{,}5$	$6{,}4 \cdot 1{,}5$	$\frac{3}{4} : 0{,}75$
$25 \cdot 0{,}73$	$0{,}25 \cdot 3$	$12{,}5 \cdot 7{,}3$	$1{,}5 : \frac{3}{4}$
$1 : 0{,}25$	$7{,}3 \cdot 6{,}9$	$0{,}25 \cdot 100$	$\frac{1}{2} \cdot 1{,}5$

Hier besteht das Ziel darin, einen aufgabenadäquaten – die Besonderheiten der jeweils gegebenen Zahlen nutzenden – Lösungsweg zu finden. Verhindert werden soll, dass voreilig ausschließlich auf die schriftliche Multiplikation zurückgriffen wird. Auch hier wird die oben genannte Forderung, „den Rechendrang aufzuhalten“ (Schütte 2004, S. 122) dadurch erfüllt, dass der Blick auf die Zahlen die Lösungsfindung beschleunigt, allerdings auf völlig unterschiedlichen Wegen. Hilfreich hierzu ist das *Sortieren* von gegebenen Aufgaben nach günstigen Lösungswegen:

- Ich „sehe“ das Ergebnis oder weiß es auswendig.
- Eine kleine Umformung hilft entscheidend weiter, damit die Aufgabe im Kopf gelöst werden kann. (Beispiele hierfür sind das Umwandeln eines Bruchs in einen Dezimalbruch oder umgekehrt, s. oben).
- Diese Aufgabe kann ich nicht anders lösen, hier muss ich wirklich (schriftlich) „rechnen“.

Typisch für diese Aufgabenformate ist, dass sie immer wieder neue kognitive Herausforderungen mit sich bringen. Die bekannten Probleme klassischer Automatisierungsübungen wie das Einschleifen falscher oder suboptimaler Lösungsverfahren (vgl. Wartha & Wittmann 2009, S. 81ff.) sollen damit vermieden werden. Dabei wird – über das Thema „Dezimalbrüche“ hinaus – auch bei anderen mathematischen Inhalten ein Bewusstsein gefördert, das darauf abzielt, bestimmte Bedingungen und Voraussetzungen in die Entscheidung über den Lösungsweg einzubeziehen und adäquat zu nutzen.

Literatur

Marxer, M. & Wittmann, G. (2011). Förderung des Zahlenblicks – Mit Brüchen rechnen, um ihre Eigenschaften zu verstehen. *Der Mathematikunterricht*, 57(2), 25–34.

Marxer, M. & Wittmann, G. (2012). Den Stellenwerten eine Bedeutung geben. Dezimalbrüche multiplizieren jenseits der Kommaverschiebungsregeln. *mathematik lehren*, 171, 44–48.

Marxer, M. & Wittmann, G. (2013). Auch Dezimalbrüche sind Brüche. Mit Dezimalbrüchen flexibel rechnen, um ihre Eigenschaften zu verstehen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 55(4), 30–34.

Rathgeb-Schnierer, E. (2006). *Kinder auf dem Weg zum flexiblen Rechnen. Eine Untersuchung zur Entwicklung von Rechenwegen bei Grundschulkindern auf der Grundlage offener Lernangebote und eigenständiger Lösungsansätze*. Hildesheim: Franzbecker.

Schütte, S. (2004). Rechenwegnotation und Zahlenblick als Vehikel des Aufbaus flexibler Rechenkompetenzen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 25(2), S. 130–148.

Schütte, S. (2008). *Qualität im Mathematikunterricht der Grundschule sichern. Für eine zeitgemäße Unterrichts- und Aufgabenkultur*. München: Oldenburg.

Wartha, S. & Wittmann, G. (2009). Lernschwierigkeiten im Bereich der Bruchrechnung und des Bruchzahlbegriffs. In: A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg): *Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Lernschwierigkeiten erkennen und überwinden*. Weinheim, Basel: Beltz, 73–108