Frank ROTHE, Salzburg

Verstehen im Mathematikunterricht

Was macht Verstehen im Mathematikunterricht aus? Dieser Beitrag beschreibt eine mögliche Antwort, indem der Begriff des Verstehens aus zwei unterschiedlichen Konstituenten bestehend präzisiert wird. Konkrete Beispiele aus dem Mathematikunterricht verdeutlichen diesen Verstehensbegriff und seine didaktischen Gestaltungsmöglichkeiten. Gleichzeitig zeigt sich, dass diese Wesenszüge des Verstehens sich direkt auf den Begriff und die Praxis des Übens auswirken.

Der Verstehensbegriff

Das Verstehen ist ein zentraler Aspekt im Mathematikunterricht. Dabei erscheint Verstehen oft eingebettet in den umfassenderen Begriff des Lernens.

Bei Erich Chr. Wittmann findet sich die Formulierung des Lernens in Sinnzusammenhängen. Dabei ermöglichen fachliche Sinnzusammenhänge aus der Erfahrungs- und Erlebenswelt der Kinder ein individuelles sinnerfülltes Lernen (vgl. Wittmann & Müller, 2007, S. 164). Dies lässt sich so interpretieren, als sei Verstehen ein Lernen von Inhalten und Zusammenhängen, welche mit Sinn oder Bedeutung für die Lernenden erfüllt sind. Rolf Weyrauch beschreibt den Verstehensprozess als ein Beziehungsgeflecht, welches überhaupt erst eine Sinngebung und damit eine tatsächliche subjektive Inbesitznahme einer Erkenntnis ermögliche (vgl. Weyrauch, 2001, S. 27). Alle diese Autoren beschreiben in ähnlicher Weise das Verstehen als ein In-Beziehung-Setzen.

Eine ausdrückliche Formulierung von Verstehen in der Mathematik in diesem Sinne – findet sich bei Werner Blum. Unter dem Verstehen mathematischer Inhalte könne man das Erfassen von deren Bedeutung ansehen (Blum & Wiegand, 2000, S. 106). Diese Formulierung betont zum einen die mathematischen Inhalte und zum anderen das Erfassen von deren Bedeutung als Aktivität. Diese Sichtweise ist bemerkenswert. Bei dem Psychologen Jerome Bruner ist Verstehen ein zentraler Aspekt des entdeckenden Lernens. Es basiert zunächst auf dem Entwickeln von Vermutungen, Annahmen und induktiven Schlussfolgerungen, die anschließend gezielt überprüft werden können (vgl. Woolfolk & Schönpflug, 2008, S. 356 f.).

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1007–1010). Münster: WTM-Verlag

Vor diesem Hintergrund soll im Folgenden Verstehen aufgefasst werden als ein aktives In-Beziehung-Setzen von Inhalten. Dieser Verstehensprozess hat zwei Wesenszüge.

Mit Blick auf den Erkenntnisprozess erfüllen sie unterschiedliche charakteristische Funktionen. Die wesentliche Funktion des ersten Wesenszuges ist das Entwickeln einer möglichst konkreten Idee von dem, was gemeint sein könnte. Die wesentliche Funktion des zweiten Wesenszuges betrifft das aktive und gezielte Ausprobieren der zuvor gewonnenen Idee. Die entwickelte Idee wird hinsichtlich ihrer mathematischen Bedeutung und inhaltlichen Konsequenzen konkret nachvollzogen. Abschließend erweist sich vergleichend, ob überhaupt und inwiefern die konkrete Idee das Gemeinte widerspiegelt. In diesem (Überprüfungs-) Rahmen entspricht die konkrete Idee dem tatsächlich Gemeinten und kann als bestätigtes bzw. erprobtes Verständnis des Gemeinten bezeichnet werden. Beide Wesenszüge gestalten den Lernprozess als Verstehensprozess mit.

Umsetzung im Mathematikunterricht

Welche didaktische Perspektive hat dieser Verstehensbegriff im Mathematikunterricht? Dies soll exemplarisch am Thema der quadratischen Gleichungen skizziert werden. Konkret geht es um die ersten Schritte der Einführung der Lösungsformel quadratischer Gleichungen unter Zuhilfenahme des obigen Verstehensbegriff mit seinen zwei Wesenszügen.

$$
\begin{aligned}
x^2 + 6x + 8 &= 0 && |-8 \\
x^2 + 6x &= -8 \\
x^2 + \underbrace{6x + 9}_{(6:2)^2} &= +9-8 \\
(x+3)^2 &= 9-8 && |\pm\sqrt{\ } \\
x+3 &= \sqrt{9-8} && |-3 \\
{}_1x_2 &= -3 \pm \sqrt{9-8} \\
x_1 &= -3+\sqrt{9-8} = -2 \\
x_2 &= -3-\sqrt{9-8} = -4
\end{aligned}
$$

Abbildung 1: quadratische Gleichung

Zunächst wird an das Vorwissen der quadratischen Ergänzung angeknüpft. Entdeckendes Üben evoziert bei den Lernenden die Frage, wie das Rechenverfahren der quadratischen Ergänzung abgekürzt werden kann. Wie lässt sich aus der Aufgabenstellung (s. Abb. 1, kurzer Pfeil) direkt die Zeile mit ${}_1x_2$ (s. Abb. 1, langer Pfeil) ableiten? Hierzu werden die Zahlen, z.B. die -3, im Rechengang zurückverfolgt. Dieses Zurückverfolgen geschieht unter dem Aspekt „woher und warum erscheint die -3“. So entsteht als eine mathematisch begründete Handlungsanweisung die konkrete Idee, wie sich aus der Aufgabenstellung die -3 (und die anderen Zahlen) entwickelt (erster Wesenszug). Im Folgenden wird diese Vermutung an charakteristischen Gleichungen ausprobiert.

Dieses Ausprobieren hat noch nicht den Charakter des Übens, bei dem schon immer etwas gekonnt wird. Es ist ein Experimentieren, von dem Susanne Prediger et al. sagen, es sei für Lernende von Bedeutung zu wissen, ob sie im epistemologischen Modus des Erfindens oder im Modus des Anwendens von bekannten Elementen seinen (Prediger, Hußmann, Leuders, & Barzel, 2014).

In dem obigen Beispiel wurde dargestellt, wie der Verstehensbegriff auf mathematisches Methodenwissen angewandt werden kann. Auch seine Anwendung auf Begriffswissen ist möglich (vgl. forschung.calculemus.at/2014/03/19/verstehen-auf-der-48-gdm-tagung/).

Verstehen und Üben

Verstehen und Üben erscheinen in einer interessanten Wechselbeziehung, wenn die jeweils dabei aktivierten kognitiven Prozesse der Lernenden differenziert betrachtet werden. Zum Zwecke der größeren Deutlichkeit soll dies anhand des ganzheitlichen Unterrichtskonzepts von Erkunden-Ordnen-Vertiefen geschehen (Barzel, Prediger, Leuders, & Hussmann, 2011). Dem modernen Übungsbegriff folgend ist Üben integraler Bestandteil in jeder „Phase" des Lernprozesses (Büchter & Leuders, 2005, S. 140) (Abb. 2, dunkler Verlauf). Zudem bildet das Üben in diesem Unterrichtskonzept trivialer Weise einen Schwerpunkt in den (Teil-) Prozessen Üben und Vernetzen. Auch das Verstehen bildet einen Schwerpunkt insofern die beteiligten kognitiven Prozesse der Lernenden betrachtet werden. Verstehensprozesse sind besonders wichtig beim individuellen Lösen von Problemen (vgl. Erarbeiten Abb. 2), dem kommunikativen Austauschen der Ergebnisse und im anschließend Übergang zum Systematisieren. Über den Schwerpunkt hinaus scheint jedoch Verstehen auch integraler Bestandteil in allen „Phasen" des Lernprozesses (Abb. 2, heller Verlauf) zu sein. Hierzu betonen Büchter & Leuders, dass Üben nur mit einem Mindestmass an Verstehen, Sinn und Transfer sinnvoll sei, um der Entstehung von isoliertem Wissen vorzubeugen (Büchter & Leuders, 2005, S. 143).

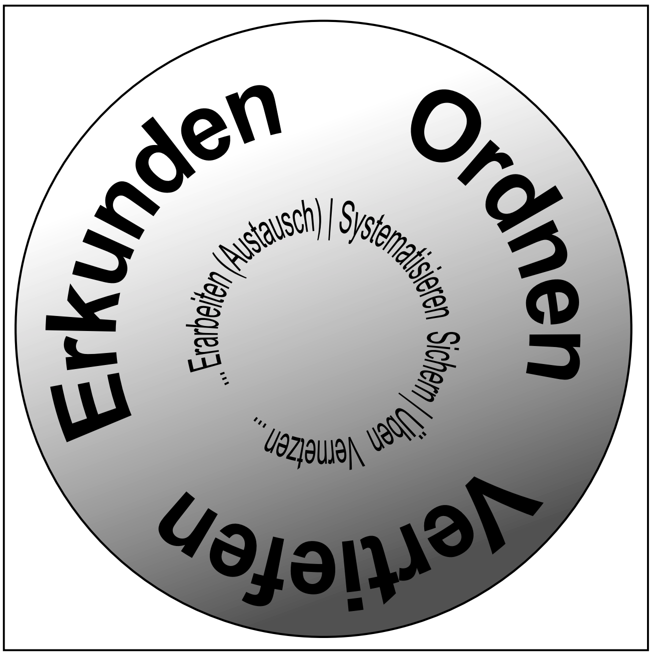

Abbildung 2: Konzept "Erkunden - Ordnen -Vertiefen"

Der Beschreibung der kognitiven Prozesse bei Lorin Anderson et al. (Anderson & Krathwohl, 2001) folgend lässt sich die oben formulierte Wechselbeziehung von Verstehen und Üben folgender Maßen präzisieren. Im Verstehensprozess aktivieren die Lernenden vorzugsweise die Denkkategorien Understand, Analyze und Evaluate. Differenziert betrachtet trifft dies insbesondere auf den ersten Wesenszug des Verstehens zu, während es beim zweiten Wesenszug auch zur kognitiven Aktivierung von Apply kommt. Beim Üben ist es in gewisser Weise umgekehrt. Die Lernenden greifen verstärkt auf die kognitiven Prozesse von Apply und Remember zurück. Ausdrücklich ist dies der Fall, wenn es um das wiederholende Üben geht. Beim vernetzenden Üben werden zunehmend die kognitiven Prozesse von Analyze und Understand wieder bedeutsam (vgl. Rothe, 2011, S. 97-101).

Literatur

Anderson, L. W. & Krathwohl, D. R. (2001). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing* (Abridged Ausg.). New York {[u.a.]: Longman.

Barzel, B., Prediger, S., Leuders, T. & Hussmann, S. (2011). Kontexte und Kernprozesse - Aspekte eines theoriegeleiteten und praxiserprobten Schulbuchkonzepts *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011*.

Blum, W. & Wiegand, B. (2000). Vertiefen und Vernetzen - Intelligentes Üben im Mathematikunterricht. In R. Meier (Ed.), *Üben & Wiederholen* (S. 106-108). Seelze: Friedrich.

Büchter, A. & Leuders, T. (2005). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln : Lernen fördern - Leistung überprüfen*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Prediger, S., Hußmann, S., Leuders, T. & Barzel, B. (2014). Kernprozesse - Ein Modell zur Strukturierung von Unterrichtsdesign und Unterrichtshandeln. In I. Bausch, G. Pinkernell & O. Schmitt (Eds.), *Unterrichtsentwiclung und Kompetenzorientierung. Festschrift für Regina Bruder* (online ed., S. 81-92). Münster: WTM Verlag.

Rothe, F. (2011). *Struktur kognitiver Prozesse*. Münster u.a.: LIT.

Weyrauch, R. (2001). *Verstehensprozesse von Schülern im Rahmen der Begabtenförderung am Beispiel der nichteuklidischen Geometrie* (1. Aufl.). Göttingen: Cuvillier.

Wittmann, E. C. & Müller, G. N. (2007). *Handbuch produktiver Rechenübungen. 1. Vom Einspluseins zum Einmaleins* (2. Ausg.). Stuttgart: Klett.

Woolfolk, A. & Schönpflug, U. (2008). *Pädagogische Psychologie* (10. Aufl.). München {[u.a.]: Pearson Studium.