Jan BLOCK, Braunschweig

Flexibles algebraisches Handeln bei quadratischen Gleichungen durch Aufgaben zum Variieren erfassen und entwickeln

Flexibles algebraisches Handeln

In einer Studie zum flexiblen algebraischen Handeln wird u. a. mit einer Aufgabe zum Variieren einer quadratischen Gleichung untersucht, welche Merkmale Schülerinnen und Schüler bei quadratischen Gleichungen wahrnehmen, welche Bedeutungen sie diesen Merkmalen zuweisen und inwieweit diese förderlich oder hinderlich für flexibles algebraisches Handeln sein können (vgl. Block 2014). Flexibles algebraisches Handeln kann in Anlehnung an das Konzept des flexiblen Rechnens (Rathgeb-Schnierer, 2006; Threlfall 2002) definiert werden als die Fähigkeit zur Wahl einer adäquaten Bearbeitungsmethode, die von den spezifischen Aufgabenmerkmalen und den Mitteln des Lernenden abhängig ist. Bei quadratischen Gleichungen sind die auftretenden Zahlen sowie die Struktur der auftretenden Terme und der Gleichung als Ganzes Merkmale für die Auswahl eines geeigneten, d. h. effizienten und fehlerunanfälligen Lösungsverfahrens.

Variation quadratischer Gleichungen

Schupp (2002) klassifiziert Variationsstrategien für Aufgaben verschiedener Themenbereiche der Mathematik allgemein. Diese lassen sich für quadratische Gleichungen konkretisieren, wie die Übersicht mit ausgewählten Beispielen in der folgenden Tabelle zeigt.

	Bezeichnung	**Strategiebeschreibung**	**Beispiel** $x^2+2x-6=0$ **wird variiert zu**
V1	Geringfügig ändern	Änderung der auftretenden Zahlen	$x^2+3x-7=0$
V2	Analogisieren	Änderung der auftretenden Operatoren (einschließlich des Exponenten)	$x^2-2x+6=0$ $-x^2+2x-6=0$
V3	Verallgemeinern	Die Änderung führt zu einem allgemeineren Fall	$x^2+2x-6=8$ $2x^2+2x-6=0$
V4	Spezialisieren	Die Änderung führt zu einem Spezialfall	$x^2+2x=0$ $x^2-6=0$
V5a	Darstellung ändern	Umsortieren eines Terms	$x^2-6+2x=0$
V5b		Umformen eines Terms	$x^2+x-6+x=0$
V5c		Umformen einer Gleichung	$x^2+2x=6$
V6	Kombinieren	Kombination verschiedener Strategien	$x+2x^2=-8$

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Mit Blick auf die Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen ist festzustellen, dass Variationen mittels verschiedener Strategien sich unterschiedlich auf die Auswahl geeigneter Lösungsverfahren auswirken. Während V3 und V4 unmittelbar ein anderes Lösungsverfahren als die p-q-Formel für das Beispiel evozieren, ist dies bei den anderen Variationsstrategien abhängig von der konkreten Variation.

Zur Beurteilung von Variationen können Kriterien entwickelt werden, die sich auch bei der Beurteilung kreativer Prozesse eignen, da die Generierung von Variationen einen kreativen Prozess darstellt (vgl. Schupp (2002) unter Bezugnahme auf Becker und Shimada (1997)). Im Kontext der eigenen Studie sind folgende Kriterien bedeutsam: Flexibilität (Anzahl der verschiedenen verwendeten Strategien), die Fähigkeit zur Benennung der angewandten Strategie und die Qualität des mathematischen Denkens im Hinblick auf die Bedeutung der veränderten Merkmale der Gleichung. Ebenfalls zur Beurteilung von Variationen eignet sich das von Winter (1988) für die Beurteilung divergenten Denkens genannte Kriterium der „Elaboriertheit“ (Ausgestaltung mit Details), das sich auf die Variation selbst und die Erklärung der Variation anwenden lässt.

Merkmale und Potenzial von Variationsaufgaben

Bei der Variation einer gegebenen quadratischen Gleichung handelt es sich um eine offene Aufgabenstellung hinsichtlich der Bearbeitungswege und der Ergebnisse. Die Aufgabenstellung ist differenzierend, da sie auf verschiedenen Niveaus bearbeitet werden kann und sie ist authentisch hinsichtlich der angeregten Prozesse, da die jeweiligen Kompetenzen sichtbar werden. Dies sind Merkmale von Aufgaben mit diagnostischem Potenzial (vgl. z. B. Büchter & Leuders, 2005). Beim Variieren können von den Schülerinnen und Schülern keine bekannten Routinen oder Standardverfahren (wie zum Lösen von Gleichungen) angewandt werden. Auch wenn z. B. das Variieren der auftretenden Zahlen bei wiederholter Aufgabenstellung zur Variation von den Schülerinnen und Schülern als Routine verwendet wird, so hat diese Variationsstrategie je nach fachlichem Kontext (z. B. Gleichung vs. geometrische Konstruktion) ganz unterschiedliche Bedeutung und Relevanz. Weinert beschreibt „den Erwerb und die Verfügbarkeit einer intelligent organisierten, flexibel zugänglichen und originell nutzbaren bereichsspezifischen Wissensbasis“ (Weinert 1994, 274) als Grundlage für die Erzielung kreativer Leistungen. Insofern eignen sich Kreativität erfordernde Variationsaufgaben zur Erforschung der bei den Schülerinnen und Schülern zugrunde liegenden Wissensbasis.

Zum Aufbau der Studie

> Gegeben ist die quadratische Gleichung: $x^2 + 2x - 6 = 0$
> Erfinde ausgehend von dieser Gleichung durch Veränderung neue Gleichungen.
> Sprich bitte alles aus, was dir in den Sinn kommt und durch den Kopf geht, während du die Aufgabe bearbeitest.

Abbildung 1

Abbildung 1 zeigt die Aufgabe, die die Teilnehmerinnen und Teilnehmer (11 Schülerinnen und Schüler aus vier neunten Klassen von zwei verschiedenen Gymnasien aus Niedersachsen) in der Studie bearbeitet haben. Die Schülerdokumente und die transkribierten Videos werden mit Methoden qualitativer Datenanalyse untersucht.

Mithilfe der Variationsaufgabe wird untersucht, auf welche Merkmale der gegebenen quadratischen Gleichung die Probanden fokussieren, wie sie diese variieren und inwieweit sie diesen Veränderungen Bedeutungen zumessen, insbesondere im Hinblick auf Auswirkungen der Variation auf Lösungsprozesse und Lösungen der Gleichung.

Ausgewählte Befunde und Diskussion

Für alle Teilnehmer war die Aufgabenstellung ungewohnt, was sich in Irritation und Nachfragen ausdrückte, sodass weitere Erklärungen des Versuchsleiters nötig waren. Zwei Teilnehmer ignorieren die Aufgabenstellung zunächst und beginnen damit, die Gleichungen zu lösen, sich also der ihnen bekannten Tätigkeit zu widmen, die sie aus dem Mathematikunterricht im Umgang mit Gleichungen kennen.

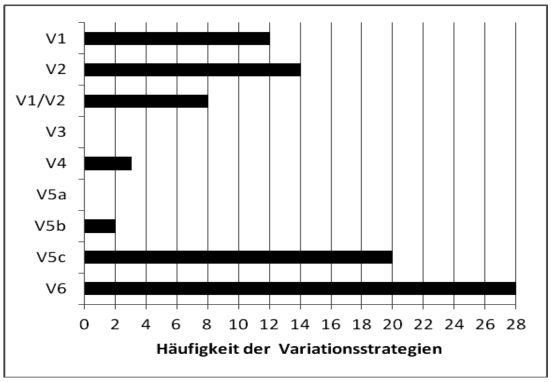

Abbildung 2

Abbildung 2 zeigt die absoluten Häufigkeiten des Auftretens der verschiedenen Strategien. In acht Fällen konnte aufgrund fehlender Erklärung nicht entschieden werden, ob V1 oder V2 angewandt wurde. Die Strategie V5a trat nur in Kombination mit anderen Strategien auf. Die Strategie V3 hingegen war bei keiner Versuchsperson zu identifizieren.

Die Strategien V3 und V4 sind im Hinblick auf flexibles algebraisches Handeln besonders relevant, da sich unmittelbar Veränderungen für den Lösungsprozess der Gleichung ergeben. Zwei Teilnehmer spezialisieren, indem sie eine zweite Variable einfügen ($x^2 + 2y - 6 = 0$) oder lineare Gleichungen ($x - 5 = 4, x + 3 = 5$) erstellen und damit den Bereich der quadratischen Gleichungen verlassen.

Bei der Strategie „Gleichung umformen“ (V5c) dominieren additive bzw. subtraktive Äquivalenzumformungen der Gleichungen. Ein Schüler produziert die in Abbildung 3 gezeigten Variationen durch Umformung der Gleichung. Er erklärt hierzu, dass er die Initialgleichung durch 2 dividiert, um die erste Gleichung zu erhalten. Diese Division wendet er dann auf alle auftretenden Zahlen, auch den Exponenten an. Bei den nächsten drei Variationen verfährt er analog, indem er die Initialgleichung der Reihe nach mit 2, 3 und 4 multipliziert. Zur letzten Variation erklärt er: „Man könnte es auch negativ machen.“ Entsprechend der bisherigen Vorgehensweise werden der Exponent und die Konstante -6 jeweils mit -1 multipliziert. Der Koeffizient 2 wird zu $\frac{1}{2}$ modifiziert, was mutmaßlich auf ein irrtümliches Potenzieren statt Multiplizieren mit -1 zurückzuführen ist. Die Erklärungen deuten auf eine Fehlvorstellung zu Äquivalenzumformungen von Gleichungen hin. Der Unterschied zwischen den auftretenden Zahlen (Exponent und Koeffizienten) wird nicht beachtet.

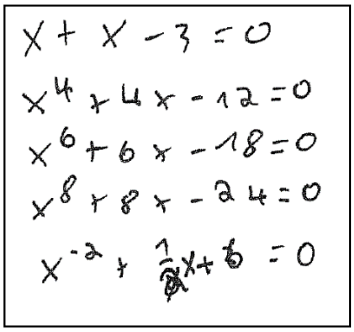

Abbildung 3

Die häufig auftretenden Strategien V1 und V2 zeigen, dass der Fokus auf die Zahlen und Zeichen gerichtet ist. Kein Teilnehmer formuliert diesbezüglich in den Erläuterungen zu den Variationen einen Bezug zur Lösbarkeit oder zu den Lösungsverfahren für die entstandenen Gleichungen.

Literatur

Becker, J. P. & Shimada, S. (1997). *The open-ended approach. A new proposal for teaching mathematics.* Reston: National council of teachers of mathematics.

Block, J. (2014). Eine didaktische Landkarte quadratischer Gleichungen als Konzeptualisierung für flexibles algebraisches Handeln. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014*. Münster: WTM. 197-200.

Büchter, A. & Leuders, T. (2005). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Rathgeb-Schnierer, E. (2006). *Kinder auf dem Weg zum flexiblen Rechnen*. Hildesheim: Franzbecker.

Schupp, H. (2002). *Thema mit Variationen. Aufgabenvariation im Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker.

Threlfall, J. (2002): Flexible Mental Calculation. *Educational Studies in Mathematics 50(1)*, 29-47. doi: 10.1023/A:1020572803437

Weinert, F. E. (1994). Entwicklung und Sozialisation der Intelligenz, der Kreativität und des Wissens. In: K. A. Schneewind (Hrsg.). *Psychologie der Erziehung und Sozialisation*. Göttingen: Hogrefe. 259-284.

Winter, H. (1988). Divergentes Denken und quadratische Gleichungen. *Mathematik lehren 28*, 54-55.