

Johanna RELLENSMANN, Stanislaw SCHUKAJLOW,  
Claudia LEOPOLD, Universität Münster

## **Gute Skizze – Bessere Lösung?**

### **Selbsterstellte Skizzen beim mathematischen Modellieren**

Visualisierungen in Form von selbsterstellten Skizzen werden im Mathematikunterricht häufig eingesetzt und als hilfreiches Instrument zur Unterstützung von Lernprozessen angesehen (Hembree, 1992). Aus theoretischer Sicht erfordert das Erstellen einer Skizze die Selektion und Organisation von relevanten Informationen und kann so zu einer tieferen Informationsverarbeitung und zu einem besseren Problemverständnis führen. Jedoch ist die Skizzenerstellung eine zusätzliche kognitive Belastung und bindet Kapazitäten, die dann nicht mehr für das Lösen der Aufgabe zur Verfügung stehen (Renkl & Nückles, 2006). Empirische Befunde zur Wirksamkeit von selbsterstellten Skizzen beim Problemlösen sind inkonsistent. Ergebnisse aus Interventionsstudien lassen darauf schließen, dass das Wissen über Skizzen und die Fähigkeit zur Erstellung qualitativ guter Skizzen einen Einfluss auf die Leistung der Schüler hat (Csikos, Szitányi, & Kelemen, 2012; Van Essen & Hamaker, 1990). Zudem scheint die Art der erstellten Skizze ein wichtiger Einflussfaktor zu sein (De Bock, Verschaffel, & Janssens, 1998; Hegarty & Kozhevnikov, 1999). Beim mathematischen Modellieren können Skizzen zur Situation und Skizzen zur Mathematik gezeichnet werden. Eine Situationsskizze stellt die in der Aufgabe beschriebenen Objekte und Relationen realitätsnah dar. Eine mathematische Skizze reduziert die Objekte dagegen auf ihre relevanten mathematischen Eigenschaften und enthält folglich mathematische Objekte wie Linien und Winkel.

### **Fragestellung und Wirkungsmodell**

In der hier vorgestellten Studie sollen Bedingungen identifiziert werden, unter denen die Instruktion zum Zeichnen einer Skizze einen positiven Effekt auf die Modellierungsleistung von Schülern hat. Hierfür untersuchen wir ein Pfadmodell, das die vermutete Interaktion zwischen dem Wissen über hilfreiche Skizzen, der Qualität von Situationsskizzen und mathematischen Skizzen sowie der Modellierungsleistung beschreibt (Abb. 1).

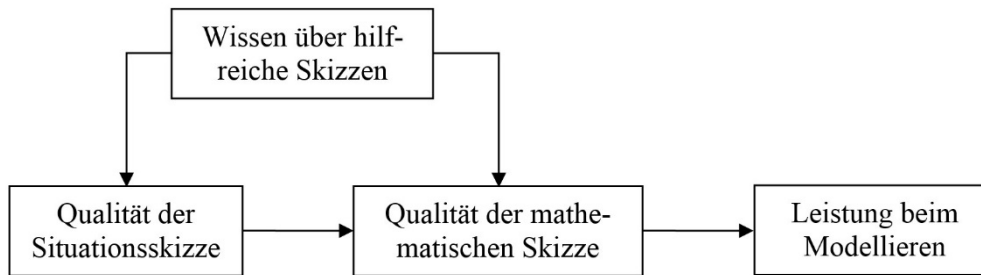


Abb. 1 Untersuchtes Wirkungsmodell

## Methode

*Stichprobe und Ablauf.* An der Studie nahmen 61 Schüler (25 Mädchen und 36 Jungen) der 9. und 10. Klasse von zwei deutschen Gesamtschulen teil. Das Durchschnittsalter lag bei  $M=15.73$  Jahren ( $SD=0.70$ ). Die Schüler bearbeiteten zunächst einen Wissenstest zu guten Skizzen. Anschließend erhielten sie eine schriftliche Erklärung zu den Skizzenarten „Situationsskizze“ und „mathematische Skizze“ sowie acht zu bearbeitende Modellierungsaufgaben. Die Schüler wurden aufgefordert, für jede Aufgabe (a) eine Situationsskizze zu zeichnen, (b) eine mathematische Skizze zu zeichnen und (c) die Aufgabe zu lösen.

*Wissenstest.* Zur Erfassung des Wissens über gute Skizzen wurde ein Test mit fünf szenariobasierten Aufgaben entwickelt. Zu jeder Aufgabe wurden fünf mögliche Skizzen präsentiert, die sich in nach dem Typ der Skizze, ihrer Vollständigkeit und Richtigkeit unterschieden. Die Schüler wurden aufgefordert, die Aufgaben nicht zu lösen, sondern jeweils die Skizze auszuwählen, die sie als am hilfreichsten für die Lösung der Aufgabe einschätzten. Die Auswahl der vollständigen und richtigen mathematischen Skizze wurde entsprechend eines Expertenratings als korrekte Antwort (Code 1) kodiert. Die Auswahl einer anderen Skizze wurde mit Code 0 erfasst. Die Reliabilität der Skala ( $\alpha=.46$ ) ist nicht zufriedenstellend, jedoch in Übereinstimmung mit bisherigen Befunden zum Strategiewissen von Schülern (Souvignier & Mokhlesgerami, 2006).

*Typ und Qualität der Skizzen.* Die erstellten Skizzen wurden einer Skizze zur Situation bzw. einer mathematischen Skizze zugeordnet. Die Qualität der Skizzen wurde mit Hilfe einer dreistufigen Skala erfasst. Code 0 wurde für eine falsche Skizze vergeben, Code 1 für eine richtige, jedoch unvollständige Skizze und Code 2 für eine vollständige und richtige Skizze. Die Reliabilität für die Qualität der Situationsskizzen ( $\alpha=.67$ ) und mathematischen Skizzen ( $\alpha=.52$ ) ist moderat und deutet analog zum Strategiewissen auf Variabilität in den Zeichenfähigkeiten der Schüler hin.

*Modellierungsleistung.* Die Modellierungsleistung wurde mit Hilfe derselben acht Modellierungsaufgaben erfasst. Für eine richtige Lösung der Aufgabe wurde Code 1, für eine falsche Lösung Code 0 vergeben. Die Reliabilität dieser Skala ist gut ( $\alpha=.76$ ).

## **Ergebnisse**

*Modellpassung.* Das Modell weist eine gute Modellpassung auf und erklärt 66% der Varianz der Modellierungsleistung.

*Direkte Effekte.* Die Vermutung, dass das Wissen über hilfreiche Skizzen einen positiven Effekt auf die Qualität der Skizzen hat, wurde teilweise bestätigt. Der Effekt des Wissens über Skizzen ist für die Qualität der mathematischen Skizzen statistisch signifikant, nicht jedoch für die Qualität der Situationsskizzen. Es zeigt sich weiterhin ein positiver Effekt der Qualität der Situationsskizze auf die Qualität der mathematischen Skizze. Die mathematische Skizze wiederum erweist sich als starker Prädiktor für die Modellierungsleistung.

*Indirekte Effekte.* Das Wissen über hilfreiche Skizzen hat einen positiven Effekt auf die Modellierungsleistung, welcher über die Qualität der mathematischen Skizze vermittelt wird. Außerdem hat die Qualität der Situationsskizze vermittelt über die Qualität der mathematischen Skizze einen positiven indirekten Effekt auf die Modellierungsleistung.

## **Zusammenfassung und Diskussion**

Die Analyse des vermuteten Wirkungsmodells bestätigt die Annahme, dass das Wissen über hilfreiche Skizzen einen positiven Effekt auf die Modellierungsleistung hat, welcher durch die Qualität der mathematischen Skizzen vermittelt wird. Für den lernwirksamen Einsatz von Skizzen im Mathematikunterricht sollte daher nicht nur die Fähigkeit zur Erstellung qualitativ guter Skizzen, sondern auch das Wissen der Schüler über Eigenschaften guter und insofern lernwirksamer Skizzen gefördert werden.

Insgesamt zeigt sich, dass beide untersuchten Skizzenarten Einfluss auf Modellierungsleistung von Schülern nehmen. Wie in Abb. 2 dargestellt wurde, kann eine Situationsskizze das Erkennen der impliziten mathematischen Struktur der Aufgabe erleichtern und auf diese Weise indirekt die Modellierungsleistung verbessern. Damit stellt eine Situationsskizze vor allem für diejenigen Schüler eine Hilfestellung dar, die im Modellierungsprozess Schwierigkeiten beim Übergang von der Realität in die Mathematik haben. Eine mathematische Skizze ist bedeutsam für die erfolgreiche Aufgabenbearbeitung, da diese Skizzenart die direkte

Anwendung mathematischer Werkzeuge ermöglicht und im Falle einer korrekten Ausführung zu einem richtigen mathematischen Resultat führt. Eine offene Frage bleibt, welche Rolle selbsterstellte Skizzen, insbesondere Situationsskizzen, für das Interpretieren und Validieren des mathematischen Resultats spielen.

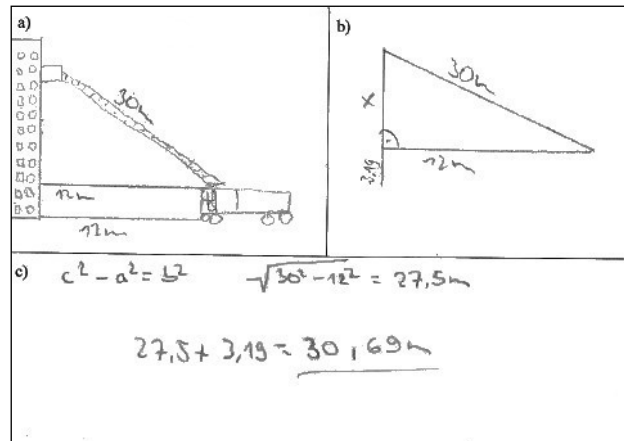


Abb. 2 Schülerzeichnungen und Lösung zur Aufgabe „Feuerwehr“ (Blum, 2011)

## Literatur

- Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri & G. Stillman (Eds.), *Trends in the teaching and learning of mathematical modelling - Proceedings of ICTMA14* (pp. 15-30). New York: Springer.
- Csíkos, C., Sztányi, J., & Kelemen, R. (2012). The effects of using drawings in developing young children's mathematical word problem solving: A design experiment with third-grade Hungarian students. *Educational Studies in Mathematics*, 81(1), 47-65.
- De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (1998). The Predominance of the Linear Model in Secondary School Students' Solutions of Word Problems Involving Length and Area of Similar Plane Figures. *Educational Studies in Mathematics*, 35(1), 65-83.
- Hegarty, M., & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology*, 91(4), 684.
- Hembree, R. (1992). Experiments and Relational Studies in Problem Solving: A Meta-Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(3), 242-273.
- Renkl, A., & Nückles, M. (2006). Lernstrategien der externen Visualisierung. In H. Mandl & H. Friedrich (Eds.), *Handbuch Lernstrategien* (pp. 135-147). Göttingen: Hogrefe.
- Souvignier, E., & Mokhlesgerami, J. (2006). Using self-regulation as a framework for implementing strategy instruction to foster reading comprehension. *Learning and Instruction*, 16, 57-71.
- Van Essen, G., & Hamaker, C. (1990). Using self-generated drawings to solve arithmetic word problems. *Journal of Educational Research*, 83(6), 301-312.