

Katrin SCHIFFER, Köln

## **Schulbuchanalyse zum Umgang mit Variablen bei der Einführung von Termen und Gleichungen in der 7. Klasse**

In diesem Beitrag wird eine Schulbuchanalyse, als Teil meines Promotionsprojektes, zum Thema Umgang mit Variablen bei der Einführung von Termen und Gleichungen vorgestellt. Die Grundlage der Analyse bildet das Schulbuch Schnittpunkt 7 für Realschulen von 2006 in der Auflage für Nordrhein-Westfalen. Dabei wird auch der begleitende Serviceband, welcher über die Schwerpunkte und Intentionen der Schulbuchautoren Auskunft gibt, in die Analyse mit einbezogen. Die zugrundeliegenden Fragestellungen lauten: Wie wird der Begriffe Variable eingeführt und wofür stehen die verwendeten Buchstaben auf den Schulbuchseiten? Was sind die zugrundeliegenden Objekte für die Lernenden? Und welche impliziten oder expliziten Begründungen gibt es auf den Seiten? Die Antworten auf diese Fragen lassen Rückschlüsse auf die Auffassung von Algebra zu, welcher die Lernenden auf Grundlage dieses Schulbuches erwerben. Um die Einführung und die Behandlung von Variablen richtig deuten zu können, ist es wesentlich den Stand der Lernenden zu berücksichtigen, welchen sie auf Grundlage der Schulbücher der Klassen fünf und sechs erworben haben.

### **1. Schnittpunkt der Klasse 5 und 6**

In den Schulbüchern Schnittpunkt der Klassen 5 und 6 tauchen Buchstaben nicht als Variablen im Sinne einer unbekanntem Zahl oder Größe auf. Buchstaben sind stattdessen in der Verwendung als Namen für geometrische Objekte wie  $a$  für eine Strecke oder auch  $B$  für einen Punkt zu finden. Ebenfalls werden Buchstaben als Abkürzung für Maßeinheiten wie  $kg$ ,  $l$ , oder  $cm$  verwendet. Anstelle von Buchstaben als Variable werden in Aufgaben leere Kästchen eingesetzt. Jedoch ist der Gebrauch des leeren Kästchens nicht eindeutig bestimmt, da diese nicht nur unbekanntem Größen oder Zahlen symbolisieren, sondern auch als Platzhalter für Relationszeichen stehen. Die Rechengesetze werden verbal angegeben und dann zusätzlich mit der Angabe eines Zahlbeispiels bekräftigt. Die Schulbuchreihe zeichnet sich durch die Besonderheit aus, dass erst bei der Einführung von Termen in der 7. Klasse der Begriff der Variable eingeführt wird. Im Serviceband wird dazu angemerkt: „Auch auf die Verwendung von Formeln [...] wurde bisher aus didaktischen Gründen verzichtet. Erst nach einer systematischen Einführung in die Bedeutung der Variablenschreibweise können die Lernenden das Formelaufstellen als eine sinnvolle und grundlegende mathematische Tätigkeit erfassen.“ (Serviceband 2006, K 42).

## 2. Schulbuchanalyse Schnittpunkt Klasse 7

Im Serviceband wird zu Beginn des Kapitels betont, dass die Intention bei der folgenden Unterrichtseinheit nicht auf dem Erlernen von Umrechnungskalkülen liegt, sondern das Verständnis für die Bedeutung von Variablen im Vordergrund steht (Vgl. Serviceband, K 42). Die Schüler sollen wissen, dass Variablen für Zahlen und Größen stehen. In diesem Sinne wird die Variable im Schülerbuch definiert: „Ein Zeichen, das man anstelle von Zahlen oder Größen verwendet, nennt man Variable.“ (Schnittpunkt 7, S. 100). Terme werden dann als Rechenausdrücke eingeführt, welche aus Zahlen, Variablen und Rechenzeichen bestehen. Auf der gleichen Seite befinden sich die ersten Aufgaben für die Lernenden, in welchen sie aufgefordert sind verschiedene Sätze oder auch Terme zu erklären. Dabei stehen hier die verwendeten Buchstaben nicht notwendigerweise für Variablen im obigen Sinne. In dem Satz: „Wer A sagt muss auch B sagen.“ zum Beispiel stehen A und B weder für unbekannte Zahlen noch Größen. In den Aufgaben tauchen Buchstaben außerdem als Teil eines Namens, als Größen, und als Abkürzungen für Maßeinheiten auf. Die verschiedenen Verwendungen der Buchstaben wird nicht thematisiert. Im Serviceband zeigt sich, dass diese Differenzierung nicht nur nicht explizit gemacht wird, sondern für die Autoren des Servicebandes auch nicht als problematisch angesehen wird. Sie schreiben: „Erklärung für die Zusammenfassung  $2y + 3y = 5y$  wie 2 Birnen + 3 Birnen = 5 Birnen sind unter mathematischen Gesichtspunkten nicht lupenrein. Sie erzeugen hier jedoch keinen Fehler und haben eine gewisse praktische Berechtigung.“ (Serviceband, K 49). Wenn  $y$  als Birne interpretiert wird, dann stellt  $y$  keine Variable nach der Definition des Schulbuches da, denn Birne ist eine Einheit. Die fehlende Unterscheidung zwischen den verschiedenen Verwendungen der Buchstaben kann hinderlich bei dem Erwerben des Verständnisses der Variable sein.

Die Einführung der Rechengesetze für Terme und somit für Variablen erfolgt nicht formal. In der Übertragung der Rechengesetze von den rationalen Zahlen auf die Terme findet sich eine implizite Rechtfertigung der Gültigkeit. Für die Lernenden werden die Rechengesetze anschaulich im Größenbereich der Längen begründet (Vgl. Schnittpunkt 7, S. 107). Die geometrische Veranschaulichung dient für die Autoren des Schulbuches zum Aufbau einer fundierten Vorstellungsgrundlage für den Lernenden. Im Serviceband wird zum Ausbau passender Grundvorstellungen ausgeführt: „So wird die Addition mit der Vorstellung von einem Aneinanderfügen von Strecken verbunden. Im Ergebnis ergibt sich erneut eine Strecke. Die Multiplikation wird mit der Berechnung von Flächeninhalten verknüpft. Das Ergebnis, ein Produkt aus zwei Variablen, steht für Flächen.“ (Serviceband,

K 50). Auf diese Weise soll die arithmetische Grundvorstellung des Anfügens und Abtrennens auf die Algebra erweitert werden. Analog zu der Addition erfolgt im Schulbuch die Einführung der Multiplikation. Auch hier wird auf eine formale Einführung verzichtet und Rechengesetze werden in den Größenbereichen der Längen, Flächen und Volumina begründet. Die bei den Lernenden ausgebildeten geometrischen Grundvorstellungen liefern die Begründungen und Rechtfertigungen für das „verständnisvolle Rechnen“. So wird im Serviceband für das Zusammenfassen von Termen ausgeführt: „Die Interpretation von  $2x + 3x$  als Aneinanderfügen von Strecken bzw. von  $2xy + 3xy$  als Aneinanderfügen von Flächen macht deutlich, dass  $3x$  und  $4xy$  nicht addiert werden können.“ (Serviceband, K 51). Die dimensionale Beschränktheit der bereichsspezifischen Erklärung der Rechengesetze wird im Schulbuch nicht explizit angesprochen.

Das erworbene Verständnis von Variablen und Termen bildet die Grundlage für das Kapitel über Gleichungen. Eine Gleichung wird eingeführt als zwei Terme, welche mit einem Gleichheitszeichen verbunden sind. Eine Gleichung zu lösen bedeutet die Zahl zu finden, die beide Terme zu demselben Wert führt (Schnittpunkt 7, S. 122). Nach einer kurzen Sequenz zum Lösen von Gleichungen durch Probieren werden die elementaren Zeilenumformungen eingeführt. Die Einstiegsaufgabe zeigt Waagen im Gleichgewicht, die jeweils Kugel und Würfel enthalten. Die Lernenden sollen das Gewicht eines Würfels mit Hilfe des Gewichtes einer Kugel beschreiben. Im Serviceband wird explizit betont, dass die Waagen hier nicht zur Veranschaulichung der Gleichungen dienen, sondern vielmehr die Gleichungen die vorliegende Sachsituation beschreiben sollen. Die Waage stellt dabei ein neues Modell dar, dessen Vorstellung dem Lernenden helfen soll schwierigere Aufgaben zu lösen. Die Grenzen dieses Modells werden zwar im Serviceband thematisiert, jedoch nicht als Anregung für den Unterricht formuliert. Im Schulbuch selbst wird die Beschränktheit des Modells auf natürliche Zahlen nicht aufgegriffen. Nach diesem Einstieg erfolgt die Einführung der Umformungsregeln. Für jede Grundrechenart wird durch Vorrechnung eines einfachen Beispiels die Umformungsregel gesichert. Eine formale Begründung erfolgt nicht, vielmehr werden die Regeln für die Lernenden durch die Veranschaulichung der einzelnen Schritte im Waagenmodell begründet. Auf die aus dem vorherigen Kapitel aufgebauten Grundvorstellungen des Anfügens und Abtrennens wird bei der Behandlung der Gleichungen kein Bezug genommen.

### **3. Auffassung von Algebra**

Schnittpunkt 7 führt Variablen als unbekannte Größe oder Zahl ein und unterstützt durch seine Veranschaulichungen den Aufbau von geometrischen

Grundvorstellungen, wie das Anfügen und Abtrennen von Strecken oder Flächen bei der Addition von Termen. Die Betonung dieser geometrischen Grundvorstellungen sowie das Begründen der Rechengesetze innerhalb eines realen Gegenstandsbereichs, wie dem Größenbereich der Längen, führt dazu, dass für die Lernenden die zugrundeliegenden geometrischen Objekte die Objekte der Algebra sind. Sie lernen gemäß dieser Analyse eine Theorie über die Veranschaulichungsmittel. Auch bei der Gleichungslehre wird die Vorstellung von Gleichungen mit dem Veranschaulichungsmodell der Waage verknüpft. Hier stellen ebenfalls die vorliegenden Gewichte die Objekte da. Daher ist es gerechtfertigt zu sagen, dass die Objekte für die Lernenden auf den Schulbuchseiten empirisch gegenständlich sind. Die Konzeption des Schulbuches zeigt, dass die Geometrie bzw. die geometrischen Zusammenhänge als Grundlage der Rechtfertigung für die einzelnen Umformungsschritte dienen. Gesetze wie das Distributivgesetz werden mit Hilfe geometrischer Situationen begründet. Eine formale Begründung für die Rechenkalküle erfolgt nicht, sondern diese werden in einem realen Größenbereich begründet. Die Algebra wird also auf Grundlage dieses Schulbuches nicht als abstrakte Theorie vermittelt, sondern die Lernenden erlangen eine empirisch gegenständliche Theorie über Variablen, Termen und Gleichungen (vgl. zu empirischen Theorien Burscheid/Struve, 2010). Die empirische Auffassung von Algebra ist historisch gerechtfertigt und begründet. So ist zum Beispiel das Ziel von Eulers „Vollständige Anleitung zur Algebra“ die Phänomene der Realität zu beschreiben. Euler definiert die Algebra „als die Wissenschaft, die zeigt, wie man aus bekannten Größen unbekanntes findet“ (Euler 1770, Part 2 § 1). Eulers Darstellung der Algebra in seinem Lehrbuch erfüllt die Merkmale einer empirisch gegenständlichen Theorie (vgl. Reimann/Witzke, 2013).

## Literatur

- Burscheid, H.J., Struve, H. (2010): Mathematikdidaktik in Rekonstruktion – Ein Beitrag zu ihrer Grundlegung, Franzbecker Verlag.
- Euler, L. (1770): Vollständige Anleitung zur Algebra, 1959. Aufl., Reclam Verlag.
- Reimann, K., Witzke, I. (2013): Eulers Zahlauffassung in der „Vollständigen Anleitung zur Algebra. In M Meyer, M. Müller-Hill & I. Witzke (Hrsg.): Wissenschaftlichkeit und Theorienentwicklung in der Mathematikdidaktik – Festschrift zum sechzigsten Geburtstag von Horst Struve. Franzbecker Verlag, S. 125-144.
- Böttner, J., Maroska, R., Olpp, A., Pongs, R., Stöckle, C., Wellstein, H. & Wontroba, H. (2006): Schnittpunkt 7. Mathematik für Realschulen., Nordrhein-Westfalen: Schülerbuch, Bd. 7, Klett Ernst.
- Dermann, G., Eberle, R., Frey, B.-J., Frey, H., Palte, M., Straubmüller, G. & Wellpott, K. (2006): Schnittpunkt 7. Mathematik für Realschulen., Nordrhein-Westfalen: Serviceband, Bd. 7, Klett Ernst.