

Jan F. WÖRLER, Würzburg

## **Computersimulationen im Mathematikunterricht – Ein Vorschlag der Klassifizierung durch Interaktionsgrade**

Computersimulationen treten im Mathematikunterricht vielerorts auf: Für die Stochastik beispielsweise lässt sich in TKP leicht ein Programm erzeugen, das das Gesetz der großen Zahlen beim 2000-maligen Werfen eines Würfels illustriert. Und in der Geometrie nutzen wir in DGS ganz selbstverständlich das Tool *Kreis zeichnen* – und „simulieren“ dabei den Einsatz eines Zirkels.

In beiden Fällen steht *simulieren* für *etwas nachmachen*: Beim computer-gestützten Würfelwurf wird eine reales, physikalisches Experiment virtuell nachgebildet. Und auch das Ziehen eines Kreises in Geometriesoftware ist dem Einsatz des Originalwerkzeugs nachempfunden.

Wie können solche Computersimulationen in Hinblick auf den Einsatz im Unterricht klassifiziert werden? Üblicherweise unterscheidet man bei Simulationen zwischen physikalischen Simulationen und solchen mit mathematischen Modellen (Schneider 1988): Bei den einen wird ein reales, physikalisches Experiment durchgeführt, beispielsweise zum Strömungsverhalten eines Flugzeugmodells im Windkanal, bei den anderen dagegen ein „Berechnungsexperiment“ (Krüger 1974, 27) auf der Basis mathematischer Modelle.

Intuitiv würde man Computersimulationen wohl in diese zweite Kategorie einordnen. Doch es spricht einiges dafür, sie auch als physikalische Simulationen aufzufassen, wären doch beide Fälle in gleicher Weise auch real durchführbar: Der 2000-fache Würfelwurf würde zwar einige Zeit dauern, könnte aber abgesehen von diesem eher praktischen Gesichtspunkt auch im Unterricht gut bewältigt werden (20 Schüler werfen je 10 Würfel 10 Mal und notieren die Ergebnisse). Das reale Zeichnen eines Kreises auf Papier ist ebenfalls vergleichsweise trivial. Offenbar ist die oben genannte klassische Differenzierung von Simulationen für viele Computersimulationen, die im Mathematikunterricht eingesetzt werden und reale Experimente virtuell nachbilden, ungünstig.

### **Simulation als Experiment mit Modellen**

Auf der Suche nach Alternativen muss man die Charakteristika derartiger Computersimulationen berücksichtigen und vergleichen. Der Aspekt, dass die hier genannten Simulationen ein reales Vorbild haben, schlägt die Brücke zum Begriff des mathematischen *Modells*: „Simulieren ist das Experimentieren mit Modellen“, heißt es etwa bei Krüger (1974) und ganz ähn-

lich bei Greefrath und Weigand (2012). Diese Sichtweise passt zu den oben genannten Beispielen; sie beantwortet die Frage nach dem Wesen der Simulation aber nur scheinbar und wirft vielmehr zwei weitere Fragen auf: Was sind Modelle? Und was bedeutet Experimentieren?

Zur Frage nach der Bedeutung des Begriffes *Modell* wird häufig auf Henn (2000) verwiesen, der in Modellen „vereinfachende [...] Darstellungen der Realität“ sieht. Andererseits sind aber unsere mathematischen Sammlungen voll von Modellen abstrakt-mathematischer Objekte, wie etwa Drahtmodellen der Kleinschen Flasche, weshalb Henns Sichtweise um den Aspekt der Darstellung abstrakter, nicht-realer Strukturen ergänzt werden kann.

Der Begriff des *Experiments* wird dagegen entscheidend durch die Naturwissenschaften geprägt: So sieht Berger (2006) im Experiment ein „objektives und wiederholbares [...] Verfahren zur Erkenntnisgewinnung“ und Kircher et al. (2009) führen zum Experimentieren für die Physik aus: „Unter festgelegten und kontrollierbaren Rahmenbedingungen werden Beobachtungen und Messungen an physikalischen Prozessen und Objekten durchgeführt; Variablen werden systematisch verändert und Daten gesammelt“. Das Prinzip der Variation und mit ihr auch des (parallelen oder seriellen) Wiederholens beim Arbeiten mit Modellen ist dem Experimentieren also inhärent.

### **Die sechs Interaktionsmöglichkeiten**

Wenn aber die *Variation bei der Arbeit mit Modellen* für das Simulieren von zentraler Bedeutung ist, so muss man fragen: Was lässt sich denn hier eigentlich variieren? Nach den oben ausgeführten Überlegungen sind Veränderungen entweder am *Modell* oder an der (Experimentier-) *Umgebung*, also dem System aus Umwelteinflüssen, Randbedingungen und Experimentator, denkbar. Weil sich ein Modell aus Sicht der Systemtheorie aus Elementen und ihren Beziehungen zueinander zusammensetzt, können Variationen theoretisch an sechs Punkten angreifen, den *Interaktionsmöglichkeiten* (Wörler 2015, 86f) des Nutzers mit dem zugrunde liegenden Modell:

- (I 1) Variation der Anzahl von Modell-Elementen,
- (I 2) Variation der Eigenschaften der Modell-Elemente,
- (I 3) Variation der Beziehung zwischen den Modell-Elementen,
- (I 4) Variation der Beziehung zwischen Modell und Modellumwelt, also der (Randbedingungen),
- (I 5) Variation des Modell-/Simulationszwecks (Fragestellung)
- (I 6) Variation der Modellannahmen.

Da diese Interaktionsmöglichkeiten aus der Theorie abgeleitet wurden, sind sie universell auf jegliche Art des Experimentierens mit Modellen übertragbar.

### **Beispiel: Würfelsimulation**

Im Hinblick auf das Ausgangsbeispiel der Simulation eines 2000-fachen Würfelwurfes kann eine Implementierung des Experiments auf einem Computer folgende Variationsmöglichkeiten bieten:

- zu (I 1): Seitenanzahl variieren, also statt eines sechsseitigen Würfels einen siebenseitigen verwenden ODER Anzahl der Würfe variieren ODER Anzahl der Würfel variieren
- zu (I 2): Geometrie verändern, also statt sechs gleich großen Würfelseiten die Größe der Seitenflächen verschieden wählen
- zu (I 3): Führt Rollen eines geraden, regelmäßigen Sechseckprismas auf dieselben Ergebnisse?
- zu (I 4): Würfeln auf verschiedenen Untergründen, ergeben sich draus hinsichtlich der Würfelergebnisse Unterschiede (Sind auf einem dicken Teppich z. B. Kantenlagen denkbar)? Wirkt sich der Schwung beim Würfeln auf das Ergebnis aus?
- zu (I 5): Wie weit oder in welche Richtungen rollt ein Würfel beim 2000-fachen werfen?
- zu (I 6): Die Punkte zur Kennzeichnung der Seiten eines Würfels sind nicht gewichtslos, sondern beeinflussen die Masse der jeweiligen Würfelseite.

### **Interaktionsgrad der Implementierung einer Simulation**

Aus diesen Interaktionsmöglichkeiten lässt sich ein Klassifikationsschema für Simulationen ableiten. Hierzu prüft man für eine vorliegende Softwareumsetzung, welche Möglichkeiten der Interaktion mit dem zugrundeliegenden Simulationsmodell dem Nutzer eingeräumt werden, genauer, welche Freiheitsgrade jener bei der Nutzung des Simulationsprogrammes erhält. Diese Freiheitsgrade werden addiert und ergeben eine natürliche Zahl als abstraktes Maß für die Existenz und den Umfang solcher Möglichkeiten, den Interaktionsgrad einer Implementierung (vgl. Wörler 2012b, 42ff). „Darunter soll ein ordinales, nicht-metrisches Merkmal verstanden werden, das iterativ definiert wird: Mit jedem Freiheitsgrad, den eine Umsetzung dem Benutzer zusätzlich erlaubt, erhöht sich der Interaktionsgrad um den Wert 1. Als Referenzwert wird der Interaktionsgrad einer Simulation dann auf Null gesetzt, wenn der Benutzer keinerlei Einfluss auf den Ablauf und

die Ausgestaltung des Experiments oder des mathematischen Modells hat.“ (Wörler 2015, 85).

Der Interaktionsgrad bezieht sich also immer auf eine spezielle Implementierung einer Simulation: Eine Simulation des 2000-fachen Würfelwurfs, die auf Knopfdruck allein eine Häufigkeitsverteilung liefert, hätte demnach den Interaktionsgrad 0, weil sie dem Nutzer keinerlei Möglichkeiten für Variationen am Modell oder dessen Umwelt an die Hand gibt. Lässt sich jedoch beispielsweise die Anzahl der Würfe verändern, so würde dieser Simulation der Interaktionsgrad 1 zugeordnet (Freiheitsgrad: Anzahl der Würfe). Man beachte: Für einen Vergleich zweier Simulationen zu verschiedenen Simulationsmodellen ist der Interaktionsgrad nicht geeignet.

Das Konzept der Interaktionsgrade, das auf theoretisch abgeleiteten Interaktionsmöglichkeiten fußt, hilft dabei, die Möglichkeiten spezieller Simulationen für experimentelles Arbeiten zu hinterfragen. Es kann dazu genutzt werden, Simulationsvarianten zu einem konkreten mathematischen Modell zu klassifizieren, bietet also eine Orientierungshilfe bei der Erstellung, Optimierung und Verwendung von Simulationen im Mathematikunterricht.

Es darf vermutet werden, dass sich Simulationen mit geringem Interaktionsgrad eher zur Präsentation und für Novizen eignen. Echtes experimentelles Arbeiten dagegen erfordert eher einen hohen Interaktionsgrad, also verschiedene Möglichkeiten, auf Modellelemente und ihre Beziehungen zugreifen und sie verändern zu können. Simulationen, die das leisten, könnten ggf. aber auch zur Überforderung ihrer Nutzer führen.

## Literatur

- Berger, V. (2006): Im Unterricht experimentieren. In H. F. Mikelskis, V. Berger: *Physik-Didaktik* (S. 149–167). Berlin: Cornelsen Scriptor,
- Henn, H.-W. (2000): Warum manchmal Katzen vom Himmel fallen ... oder ... von guten und von schlechten Modellen. In H. Hischer (Hrsg.): *Modellbildung, Computer und Mathematikunterricht* (S. 9–17). Hildesheim: Franzbecker.
- Greefrath, G.; Weigand, H.-G. (2012): Simulieren: Mit Modellen experimentieren. *mathematik lehren*, 147, 2–6.
- Kircher, E.; Girwitz, R.; Häußler, P. (Hrsg.) (2009): *Physikdidaktik: Theorie und Praxis*. Berlin, Heidelberg: Springer.
- Krüger, S. (1974): *Simulation: Grundlagen, Techniken, Anwendungen*. Berlin, New York: De Gruyter.
- Schneider, H.-J. (Hrsg.) (1998): *Lexikon Informatik und Datenverarbeitung*. München, Oldenburg: Oldenbourg.
- Wörler, J. F. (2015): *Konkrete Kunst als Ausgangspunkt für mathematisches Modellieren und Simulieren*. Münster: WTM.