

Christian DORNER, Wien

Finanzmathematik im Unterricht – Was soll unterrichtet werden? – ein Zugang über zentrale Ideen

1. Wieso zentrale Ideen?

Im Bereich Finanzmathematik im Mathematikunterricht gibt es bereits zwei Dissertationen, vgl. DÖHRMANN 2005 und DAUME 2009. Des Weiteren existieren einige Publikationen dazu in Fachzeitschriften, Tagungsbänden und Sammelwerken. Darin findet man beispielsweise das Binomialmodell zum Modellieren von Aktienkursen, die Berechnung von Optionspreisen und zum Teil auch die Portfoliooptimierung. Diese Vorschläge sind zwar jeweils in sich begründet, doch von einem außenstehenden Standpunkt wirken sie isoliert, unzusammenhängend und unfundiert.

Diese Situation erinnert an die Diskussion von *fundamentalen Ideen*. In der fachdidaktischen Literatur existiert kein Konsens über die Definition einer *fundamentalen Idee*. In diesem Aufsatz wird die Definition von SCHWILL verwendet, der unter einer *fundamentalen Idee* ein Denk-, Handlungs-, Beschreibungs- oder Erklärungsschema versteht, das das **Horizontalkriterium**, das **Vertikalkriterium**, das **Zeitkriterium** und das **Sinnkriterium** erfüllt (SCHWILL, 1993, S. 20 ff.). Im folgenden Diskurs wird der Begriff *zentrale Idee* anstatt *fundamentale Idee* benutzt, an dieser Stelle ist auf SCHREIBER 1979 zu verweisen, der in diesem Zusammenhang für ein Teilgebiet der Mathematik den Ausdruck *zentrale Idee* prägte.

Wie gewinnt man nun am besten *zentrale Ideen*? Bis dato existiert kein Werk, welches sich mit *zentralen Ideen* der Finanzmathematik beschäftigt. Das erfordert ein exploratives Vorgehen. Im Rahmen eines qualitativen ExpertInneninterviews wurden sechs FinanzmathematikerInnen befragt. Dieses Vorgehen wird durch die folgende Aussage von BRUNER gestützt:

“It (=designing curricula) is a task that cannot be carried out without the active participation of the ablest scholars and scientists.”
(BRUNER, 1960, S. 19)

Mit Hilfe einer qualitativen Inhaltsanalyse wurden fünf *zentrale Ideen* der Finanzmathematik aus den Transkripten gewonnen, die alle im großen „Teich“ der Modellierung und Optimierung „schwimmen“. Die Ideen lauten: *Verwenden von Stochastik im Kontext Finanzmathematik, Handhabung von Risiko* (Nutzentheorie und Diversifikation), *No-Arbitrage-Prinzip, Replikation* und *Zeitwert des Geldes* (siehe Abbildung 1). Um nachzuweisen, dass es sich dabei um eine *zentrale Idee* handelt, müssen die vier Kriterien von SCHWILL nachgewiesen werden. Exemplarisch wird das im Fol-

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

genden an einer *zentralen Idee* aufgezeigt. In Anlehnung an die Leitfadenskonzzeption werden die vier Kriterien in einer anderen Reihenfolge als in der Definition erläutert.

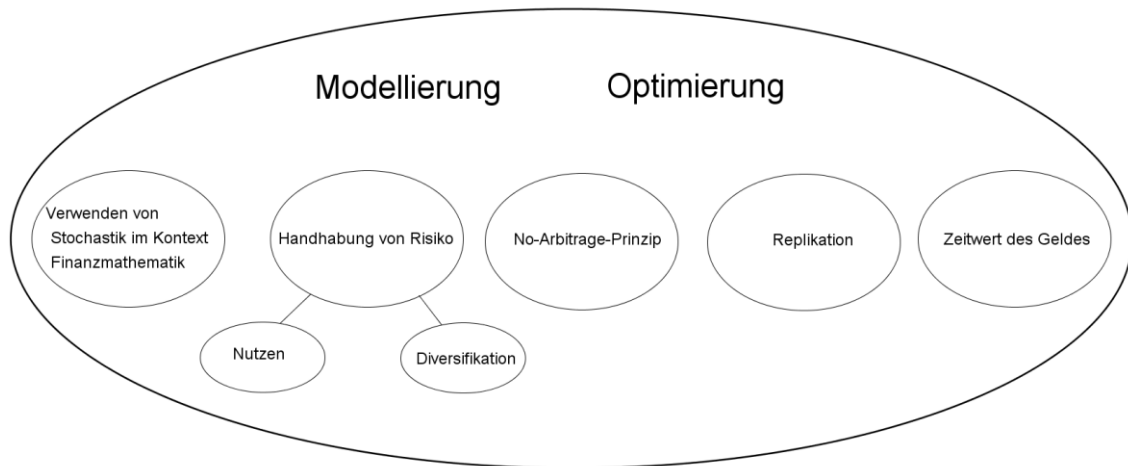


Abbildung 1 Zentrale Ideen der Finanzmathematik

2. Verwenden von Stochastik im Kontext Finanzmathematik

Zeitkriterium: BACHELIER brachte den Zufall in die Finanzmathematik (BACHELIER, 1900). Es besteht kein Zweifel, dass der Einzug des probabilistischen Denkens in der Finanzmathematik hier festzumachen sei, wie einer der Interviewpartner (FM3 für FinanzmathematikerIn 3) bestätigt:

FM3: „Die erste zentrale Idee ist das Verwenden von Wahrscheinlichkeitstheorie im Kontext von Finanzmathematik. Das geht zu mindestens auf Bachelier zurück, der eben einen geradezu mythischen Glauben an die Wahrscheinlichkeit hatte [...] diesen Aspekt überhaupt einzubauen ist eine grundlegende Idee.“

Die längerfristige Relevanz dieser Idee begründet sich allein dadurch, dass mit der stochastischen Finanzmathematik ein eigener Wissenschaftszweig entstanden ist. Ein Blick auf aktuelle Forschungsarbeiten bestätigt, dass diese Idee Zukunft haben wird.

Horizontalkriterium: Aufgrund der Etablierung der stochastischen Finanzmathematik wird dieses Denkschema nahezu überall verwendet, und das nicht nur in der Wissenschaft, sondern auch in der Praxis, wo statistische Anwendungen und Risikoabschätzung zum täglichen Brot gehören.

Sinnkriterium: Die gedankliche Abkehr vom Determinismus stellt einen wichtigen Aspekt dar. Im Alltag dürfte diese Idee noch nicht flächendeckend Niederschlag gefunden haben. Hierzu denke man an seriös wirkende

Herren im Anzug, die einem die optimale Investmentstrategie, sei es im Fernsehen oder im Internet oder gar in der Bank, verkaufen.

Die Vorgänge am Finanzmarkt sind nicht deterministisch anzusehen, sondern probabilistisch. Ein börsennotierter Kurs kann nicht vorhergesagt werden. Solche Kurse werden jederzeit vom wirtschaftlichen, politischen und gesellschaftlichen Geschehen beeinflusst. Es ist nicht vorherzusagen, wann neue kursrelevante Ereignisse passieren. Hierzu ein Zitat eines Probanden:

FMI, „Ich finde eine coole Erkenntnis aus der Finanzmathematik ist schon [...], dass wenn die letzten fünf Tage der Aktienkurs gestiegen ist, dass das dann überhaupt keine Aussage darüber ermöglicht, ob der Kurs am sechsten Tag auch wieder steigen wird oder nicht steigen wird. Das ist etwas, was man nicht glaubt, oder?“

Vertikalkriterium: Dieses Schema lässt sich auf unterschiedlichen intellektuellen Niveaus durchführen. Auf einer sehr einfachen Stufe: Es lässt sich nicht in die Zukunft schauen, man kann keinen Kurs vorhersagen. Auf einem höheren Niveau ist es das Modellieren eines Aktienkurses wie zum Beispiel in einem diskreten Setting das Binomialmodell. Wiederum eine Stufe höher steht das Modellieren eines Kurses S in kontinuierlicher Zeit t , der mit einer stochastischen Differentialgleichung und der BROWN'schen Bewegung W beschrieben wird: $dS(t) = \alpha S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$. Auf einem sehr viel höheren Niveau steht das *Fundamental Theorem of Asset Pricing*, welches die Beziehung zwischen Martingalen und Arbitrage herstellt (vgl. DELBEAN & SCHACHERMAYER, 2006, S. 5).

3. Bedeutung für die Schule

Ausgehend von den *zentralen Ideen* sollen nun Inhalte der Finanzmathematik für den Mathematikunterricht ausgewählt werden. Ein vollständiges Durchdringen einer *zentralen Idee* in der Schule ist per Definition einer solchen nicht intendiert. Es benötigt also weitere Kriterien für einen rationalen (anwendungsorientierten) Mathematikunterricht zur Finanzmathematik. BLUM 1978, JABLONKA 1999 und WINTER 2016 haben jeweils passende Kriterien ausgewiesen. Aus diesen Katalogen wurden vier Kriterien gewonnen, die im Folgenden stichwortartig beschrieben werden.

- **Formale Aspekte:** Lehrplankonformität, passendes Zeitausmaß
- **Eignung:** unmittelbar für den/die Schüler/in zu gebrauchen oder in seinem/ihrem mutmaßlichen späteren Leben von Nutzen sein
- **Authentizität:** glaubwürdige Probleme sollen behandelt werden, wird durch die Auswahl der Inhalte aus den *zentralen Ideen* erreicht

- **Mathematische Aspekte:** die verwendete Mathematik darf nicht zu trivial und nicht zu anspruchsvoll sein

Mit Hilfe der *zentralen Ideen* und der genannten Kriterien können nun einerseits bestehende Unterrichtsvorschläge zur Finanzmathematik begründet eingeordnet werden und andererseits neue fundiert entwickelt werden.

4. Neue Unterrichtsvorschläge

Ein Bereich, der in der Schule kaum thematisiert wird, sind Unterrichtssequenzen zur *zentralen Idee* mit dem Namen *Handhabung von Risiko*:

- Kredite und Risiko: Kredite werden in der Schule immer relativ starr betrachtet. In Wirklichkeit ändert sich der für die Höhe der Raten bzw. Dauer der Rückzahlung maßgebende Zinssatz während der Laufzeit. Den Auswirkungen (bzw. dem Risiko) sind sich viele KreditnehmerInnen nicht bewusst.
- Diversifikation: Die Diskussion des Prinzips: „Setze nicht alles auf eine Karte“, also die Strategie zur Verringerung des Risikos stellt eine weitere Möglichkeit dar.

Literatur

- Bachelier L. (1900). *Théorie de la spéculation*. Université Paris Sorbonne: Dissertation.
- Bruner J. (1960). *The process of education*. Cambridge: Harvard University Press.
- Blum W. (1978). Einkommensteuern als Thema des Analysisunterrichts in der beruflichen Oberstufe. In: *Die berufsbildende Schule, Zeitschrift des Berufsverbandes der Lehrer an beruflichen Schulen*, (S. 642 – 651) Wolfenbüttel: Heckners Verlag.
- Daume P. (2009). *Finanzmathematik im Unterricht*. Wiesbaden: Vieweg-Verlag.
- Delbean F. & Schachermayer W. (2006). *The mathematics of arbitrage*. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag.
- Döhrmann M. (2005). *Zufall, Aktien und Mathematik: Vorschläge für einen aktuellen und realitätsbezogenen Stochastikunterricht*. Hildesheim/Berlin: Verlag Franzbecker.
- Jablonka E. (1999). Was sind „gute“ Anwendungsbeispiele? In: Maaß J. und Schlöglmann W. (Hrsg.), *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht*, (S. 65 – 74), Hildesheim: Verlag Franzbecker.
- Schreiber A. (1979). Universelle Ideen im mathematischen Denken – ein Forschungsgegenstand der Fachdidaktik. In: *mathematica didactica*, 2, (165 – 171).
- Schwill A. (1993). Fundamentale Ideen der Informatik. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 25, 1, (20 – 31).
- Winter H. W. (2016). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblick in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*. Wiesbaden: Springer-Verlag (3. Aufl.).