Lea HAUSMANN, Udo KAMPS, Aachen

Darstellung und Messung von Konzentration mit Lorenzkurve und Gini-Koeffizient in einem Schüleruni-Workshop

1. Hintergrund

Ungleichheit – insbesondere finanzielle und soziale Ungleichheit – ist ein dauerhaft präsentes Thema in den Medien. Aussagen wie „Ein Prozent der Weltbevölkerung besitzt fast die Hälfte des Weltvermögens" (Oxfam Deutschland e.V., 2015) oder „Zehn Prozent der Haushalte verfügten im Jahr 2013 über 51,9 Prozent des Nettovermögens" (Spiegel Online, 2016) sind verknüpft mit einem statistischen Thema, das sich mit der Messung von *Konzentration* befasst, genauer mit der Verteilung einer Merkmalsumme (Vermögen, Umsätze…) auf die einzelnen Merkmalsträger (vgl. z.B. Burkschat et al. 2012, Mosler et. al. 2009).

Es bietet aktuelle, fächerübergreifende und zugleich auch mathematisch interessante Ansatzpunkte für den Mathematikunterricht, von denen einige in dem hier vorgestellten Schüleruni-Workshop aufgegriffen werden. Grundlage bilden hierbei die zwei bekanntesten Darstellungsmöglichkeiten der Konzentration: zum einen die Lorenzkurve, zum anderen als Maßzahl der darauf basierende Gini-Koeffizient.

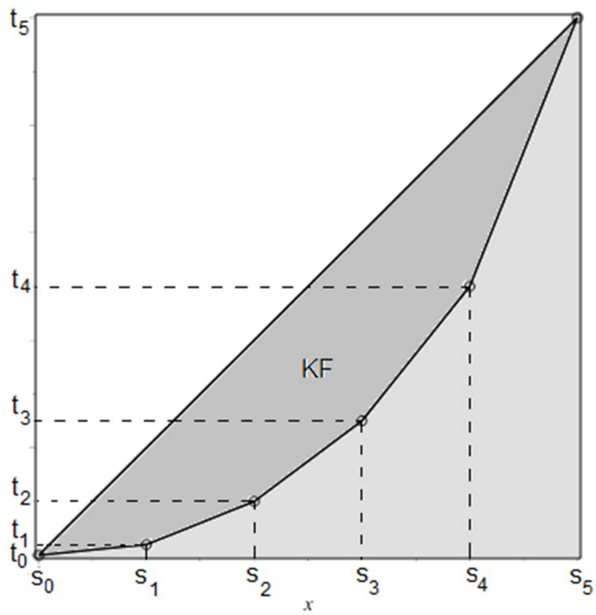

Abbildung 1: Typischer Verlauf einer Lorenzkurve. Die Konzentrationsfläche KF ist die von Lorenzkurve und Ursprungsgeraden eingeschlos-

Die *Lorenzkurve* (vgl. Lorenz 1905) zur Verteilung der Merkmalsumme $S_n = x_1 + \ldots + x_n$ der aufsteigend geordneten Merkmalsausprägungen $x_1,\ldots,x_n$ von n Merkmalsträgern wird als Streckenzug durch die Punkte $(0,0),(s_1,t_1),\ldots,(1,1)$ gezeichnet (s. Abb. 1). Hierbei bezeichnet $s_i = i/n$ den Anteil der i Merkmalsträger mit den geringsten Merkmalsausprägungen an der Gesamtzahl n, und $t_i = (x_1 + \ldots + x_i)/S_n$ den Anteil der Summe der i geringsten Merkmalsausprägungen an der Gesamtsumme. Es ergibt sich der Graph einer monoton steigenden, stückweise linearen, konvexen Funktion $L: [0,1] \to [0,1]$ mit $L(0) = 0$ und $L(1) = 1$.

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

Der Wert t_k auf der Ordinate gibt an, welcher Prozentsatz der Gesamtsumme aller Werte auf $100 \cdot s_k\%$ der „kleinsten/ärmsten“ Merkmalsträger entfällt. Offensichtlich gilt: Je größer die Konzentration ist, desto stärker „hängt die Kurve durch“; im Fall minimaler Konzentration, d.h. Gleichverteilung, entspricht die Lorenzkurve hingegen der Winkelhalbierenden.

Auf dieser Eigenschaft basiert auch die bekannteste Maßzahl zur Messung der Konzentration, der *Gini-Koeffizient*: Dieser setzt die *Konzentrationsfläche*, die von Lorenzkurve und Winkelhalbierenden eingeschlossen wird, ins Verhältnis zur Fläche unter der Winkelhalbierenden auf dem Intervall [0,1]. Je höher die Konzentration, desto größer der Gini-Koeffizient. Es bietet sich – insbesondere bei der Berechnung mit Tabellenkalkulation - an, den Gini-Koeffizienten mit Hilfe der Summe der Trapezflächen unterhalb der Lorenzkurve zu berechnen (vgl. Abb. 1):

$G = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot (s_i - s_{i-1}) \cdot (t_i + t_{i-1}) \right)$, wobei $s_0 = 0$ und $s_1 = 1$ gesetzt sind.

2. Schüleruni-Workshop

Der im Folgenden beschriebene Schüleruni-Workshop wendet sich an interessierte Schülerinnen und Schüler der gymnasialen Oberstufe. Der Aufbau orientiert sich an der Struktur einer Universitätsveranstaltung und beinhaltet zunächst 75 Minuten Vorlesung, in der Idee und Konstruktionsprinzip der Lorenzkurve sowie des Gini-Koeffizienten vorgestellt und teils im Stil eines Unterrichtsgesprächs mit den Jugendlichen zusammen erarbeitet werden. Anschließend finden, unterbrochen von Pausen, insgesamt vier Stunden Partnerarbeit zu unterschiedlichen Themengebieten statt.

Die erste Arbeitsphase (1,5 h) legt den Schwerpunkt auf die Konstruktion der Lorenzkurve und die Berechnung des Gini-Koeffizienten mit der kostenlosen, plattformunabhängigen Tabellenkalkulationssoftware OpenOffice Calc sowie auf die Interpretation der Ergebnisse. Hierbei stehen der Werkzeuggebrauch, das Ablesen an Grafiken sowie der kritische Vergleich der unterschiedlichen Darstellungsformen im Fokus.

Während die Konstruktion und Interpretation von Lorenzkurve und Gini-Koeffizient schon mit einfachen Mitteln in der Mittelstufe möglich ist, bietet sich das Thema Konzentrationsmessung auch dazu an, in der Oberstufe auf einem abstrakteren und mathematisch anspruchsvolleren Niveau wieder aufgegriffen zu werden. Neben der – in der Praxis häufig gewünschten – Konstruktion einer glatten Lorenzkurve anstatt der stückweise linearen ist auch, wie hier im Workshop genutzt, die Konstruktion einer oberen bzw. unteren Schranke für den Gini-Koeffizienten sinnvoll.

Im nächsten Arbeitsschritt erkunden die Teilnehmerinnen und Teilnehmer des Workshops daher zunächst graphisch, wie sich die Lorenzkurve bzw. die Konzentration verändert, wenn die Daten klassiert werden, und von einer Gleichverteilung der Merkmalsumme innerhalb einer Klasse ausgegangen wird. Da eine Ungleichverteilung innerhalb der einzelnen Klassen nicht berücksichtigt wird, führt dies zu einer systematischen Unterschätzung der Konzentration.

Diese Erkenntnis wird durch eine angepasste Trapezformel für den Gini-Koeffizienten quantifiziert; es wird somit eine untere Schranke für den Gini-Koeffizienten erarbeitet.

Die dritte und letzte Arbeitsphase widmet sich der im Gegensatz zur unteren Schranke mathematisch sehr anspruchsvollen Konstruktion einer oberen Schranke für den Gini-Koeffizienten. Hierbei wird bewusst eine umfangreiche, ausführliche Modellierungs- und Optimierungsaufgabe gestellt, die deutlich über den Schulstoff hinausgeht.

Ausgangspunkt ist folgende Überlegung: Angenommen, es seien nur zwei Punkte einer Lorenzkurve, $A1=(a_1,b_1)$ und $A2 = (a_2,b_2)$, einer Lorenzkurve bekannt. Wie kann nun durch diese beiden Punkte eine Lorenzkurve konstruiert werden, sodass die eingeschlossene Konzentrationsfläche maximal wird, die Konvexitäts- und Monotonieeigenschaft jedoch nicht verletzt wird (vgl. hierzu auch Farris 2010)?

Nach einigen Vorüberlegungen auf Papier erkunden die Jugendlichen diese Fragestellung mit Hilfe der dynamischen Geometriesoftware GeoGebra (s. Abb. 2). Durch Variation der Steigung der beiden Geraden durch L bzw. K verändert sich die Größe der von den Geraden und der Ursprungsgeraden eingeschlossenen Fläche, sodass die Schülerinnen und Schüler diese experimentell maximieren können. Die so bestimmbare Fläche stellt eine echte obere Schranke für die Konzentrationsfläche einer beliebigen durch A1 und A2 verlaufenden Lorenzkurve dar: Jede durch diese Punkte verlaufende Lorenzkurve zeigt eine geringere Konzentration (oder verletzt die Konvexitätseigenschaft).

Mit geometrischen Überlegungen ausgehend von Abb. 2 leiten die Workshopteilnehmerinnen und –teilnehmer nun in mehreren Teilschritten eine Formel für den Inhalt der eingeschlossenen Fläche in Abhängigkeit von den beiden Geradensteigungen her. Die Maximierung dieser Funktion und somit die Bestimmung der oberen Schranke für den Gini-Koeffizienten erfolgt mit Hilfe des CAS Maple.

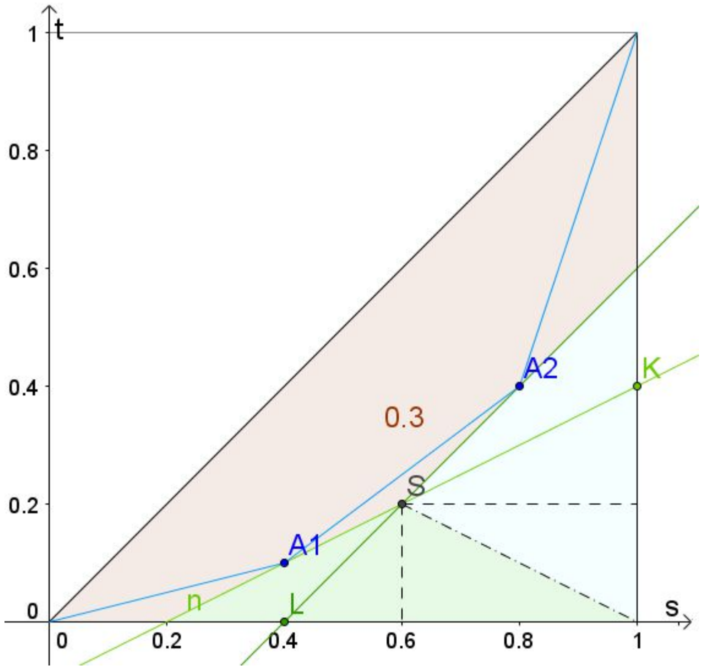

Abbildung 2: Screenshot des interaktiven GeoGebra-Applets zur Bestimmung einer oberen Schranke für den Gini-Koeffizienten

Den Abschluss bilden der Vergleich der rechnerisch gefundenen Lösung mit der zuvor in GeoGebra experimentell bestimmten maximalen Konzentrationsfläche sowie eine kritische Diskussion einschränkender Bedingungen für die Lösung (Überprüfung der Randwerte, Sonderfälle, von den Geradensteigungen zu erfüllende Eigenschaften).

Konzentrationsmessung ermöglicht, wie im beschriebenen Workshop, einen weiten Bogen von grundlegender beschreibender Statistik bis hin zu komplexen Modellierungs- und Optimierungsaufgaben. Das unterschiedliche Anspruchsniveau erfordert eine umfassende Differenzierung, bietet jedoch umfangreiche Möglichkeiten für vernetzte, abwechslungsreiche Aufgaben.

Literatur

Burkschat, M., Cramer, E., Kamps, U. (2012): *Beschreibende Statistik. Grundlegende Methoden der Datenanalyse*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum. 2. Auflage.

Farris, F. A. (2010): The Gini Index and Measures of Inequality. In: American Mathematics Monthly, Vol. 117, No. 10, S. 851-864.

Lorenz, M. O. (1905): *Methods of Measuring the Concentration of Wealth.* In: Publications of the American Statistical Association, Bd. 9, Nr. 70 (Jun., 1905), S. 209-219.

Mosler, K., Schmid, F. (2009): Beschreibende Statistik und Wirtschaftsstatistik. Berlin, Heidelberg: Springer. 4. Auflage.

Oxfam Deutschland e.V. (2015): *Besser gleich! Schließt die Lücke zwischen arm und reich! Ein Aktionsplan zur Bekämpfung sozialer Ungleichheit.* Berlin. http://www.oxfam.de/sites/www.oxfam.de/files/ox_bessergleich_broschuere_rz_web.pdf.

Spiegel Online (2016): *Deutschland: Die oberen zehn Prozent besitzten 52 Prozent des Vermögens.* http://www.spiegel.de/wirtschaft/soziales/deutschland-ein-zehntel-besitzt -52-prozent-des-vermoegens-a-1073677.html.