

Sabrina HEIDERICH, Dortmund

Charakterisierungen von Situationen mit den Begriffen der linearen, proportionalen und antiproportionalen Funktionen aus inferentialistischer Perspektive

1. Problemlage

Quantitative Studien geben Hinweise auf Verstehensschwierigkeiten bei der Identifizierung linearer, proportionaler und antiproportionaler Zusammenhänge in situativen Aufgabenstellungen. Insbesondere bei der Unterscheidung linearer und antiproportionaler Abnahmeprozesse gibt es Verwechslungen (vgl. De Bock et al. 2015, Kurth 1992, Suarez 1977). Dabei stellen vermeintlich hilfreiche, jedoch insbesondere inhaltlich-verkürzte Versprachlichungen bzw. ‚Merkregeln‘, wie bspw. ‚je mehr-desto weniger ist antiproportional‘, keine tragfähigen und langfristigen Hilfestellungen dar (vgl. Heiderich & Hußmann 2013).

2. Theoretische Grundlegungen und Forschungsinteresse

Im Rahmen eines Dissertationsprojekts wird ein *qualitativer* Blick auf die Identifizierung und Differenzierung der Begriffe der linearen, proportionalen und antiproportionalen Funktionen in konkreten Situationen und über verschiedene Situationen hinweg gelegt. Zur Erfassung des individuellen Gebrauchs von (mathematischen) Begriffen und Begriffsbildungsprozessen wird der Ansatz der ‚Epistemologie der inferentiell gegliederten Wissensstrukturen‘ (Hußmann 2013, Hußmann et al. 2016) zugrunde gelegt, der verschiedene Bezüge aus philosophischen Ansätzen, insbesondere aus dem Ansatz des semantischen Inferentialismus des Sprachphilosophen Robert Brandom (vgl. Brandom 2000, 2001), nutzt und für eine psychologische Analyse von individuellen Begriffsbildungsprozessen erweitert. Dabei werden fachlich intendierte Konzepte mit individuellen Perspektiven im Rahmen einer spezifischen Analysesprache verglichen. Eine wichtige Basis bilden die *Festlegungen* (Aussagen mit propositionalem Gehalt) der Probanden, die in einem sozialen Diskurs explizit geäußert und individuell für wahr gehalten werden. Anhand dieser können *Fokussierungen* rekonstruiert werden, die als individuell-relevante Kategorien zur Strukturierung von Situationen herangezogen werden. *Inferentielle Relationen* werden als explizit-sprachliche Verknüpfungen von Festlegungen erfasst, um individuelle Prämissen und Konklusionen für eine begründete Entscheidung auf die hier betrachteten Begriffe beschreibbar zu machen.

Darüber hinaus wird die Situiertheit von Wissen angenommen, bei der Situationen, in denen Wissen entsteht, als Teil des Wissens aufgefasst werden

(vgl. Reinmann-Rothmeier & Mandl 2001). Zur Rekonstruktion *individueller Situationen* als Ausgangspunkt des analytischen Vorgehens wird sich an das Situationsmodell des Konzepts des Modellierens angelehnt (vgl. Borromeo Ferri 2006, Blum & Leiß 2005). Dabei wird der Fokus auf den Prozess des ‚Mathematisierens‘ zwischen individueller Situation und mathematischem Begriff in der Differenzierung zwischen einer *situativen* und *formalen Fokussierungsebene* gelegt. Erstere umfasst alle Fokussierungen und Festlegungen, die potentiell zur Aktivierung der individuellen Situation zu Rate gezogen werden (können), letztere hinsichtlich des mathematischen Begriffs. Als Vermittler werden Grundvorstellungen als lokale Bedeutung des mathematischen Begriffs zur Strukturierung der Situation genutzt (vgl. Prediger 2010). Hinsichtlich eines situationsübergreifenden Gebrauchs von (mathematischen) Begriffen werden Festlegungen und Fokussierungen rekonstruiert, die über individuelle Klassen von Situationen angewendet werden (können). In Anlehnung an die Ideen einer ‚set of situations‘ (vgl. Vergnaud 1996, 1998) und ‚contextual neighborhood‘ (Pratt & Noss 2002) werden *Situationsklassen* aus normativer Perspektive genutzt, die für die betrachteten funktionalen Zusammenhänge die assoziierten Situationen über ihre semantischen Strukturen miteinander verbinden. In Anknüpfung an die Konzepte der ‚operational invariants‘ (vgl. Vergnaud 1996, 1998) und ‚situated abstractions‘ (Pratt & Noss 2002) werden *Fokussierungen* und *Urteile* (als allgemeinere Konstrukte im Vergleich zu Festlegungen) rekonstruiert, die über verschiedene Situationen hinweg angewendet werden und damit in enger Verbindung zu *individuellen Situationsklassen* stehen und im Rahmen der Analyse gemeinsam Aufschluss über Potentiale und Hürden geben sollen.

3. Methodischer Rahmen

Den Ausgangspunkt bildet ein Erprobungskapitel der achten Klasse des Lehr-/Lernwerks ‚mathewerkstatt‘ (vgl. Barzel et al. 2012) in Verbindung mit dem Forschungsansatz der ‚Fachdidaktischen Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell‘, mit dem zentralen Anliegen, Forschung und Entwicklung miteinander zu verzahnen (vgl. Hußmann et al. 2013). Die Untersuchungen haben in einer ersten Sequenz als Tiefenanalyse in Form von diagnostischen Interviews zur Erhebung der Lernstände mit sieben Paaren, in einer zweiten Sequenz mit zehn weiteren (davon unabhängigen) Paaren in achten und neunten Schulstufen für eine Absicherung in der Breite stattgefunden. In einer dritten Sequenz wurden unmittelbar anknüpfende Designexperimente mit vier dieser Paare aus der ersten und zweiten Sequenz durchgeführt, um Gelingensbedingungen und Hürden spezifischer Lernprozesse zu verstehen.

4. Erste Ergebnisse

Mit Blick auf die situative Fokussierungsebene wird der in der Stichprobe häufig zu beobachtende, individuelle Gebrauch der alleinigen Fokussierung auf ‚mehr-weniger Zusammenhänge‘ zwischen den abhängigen Größen in individuellen Situationen und über verschiedene Situationen hinweg nicht tragfähig für eine Begründung der ‚Antiproportionalität‘ (bei linear fallenden Zusammenhängen aus normativer Perspektive) genutzt. Zum Teil findet sogar eine Übertragung auf linear fallende Tabellen oder Graphen der formalen Ebene statt, so dass diese konzeptuell-reduzierten, monotonen Eigenschaften der situativ voneinander abhängigen Größen auf den mathematischen Begriff scheinbar übergeneralisiert werden. Umgekehrt nutzen andere Probanden eine Darstellung der reziproken Vervielfachungseigenschaft antiproportionaler Funktionen in Tabellen auf der Grundlage selbst gewählter Wertepaare bei offenen Aufgaben, obgleich sie im Rahmen ihrer individuellen Situation einen linear fallenden Zusammenhang aus normativer Perspektive beschreiben. Schaut man genauer auf die individuellen Situationsklassen zu den hier konkurrierenden linearen und antiproportionalen Zusammenhängen und ihren Begriffen, so werden vielfältige Perspektiven sichtbar, die bestehende Hürden im Zusammenwirken der situativen und formalen Fokussierungsebene verstehbar machen. Am Beispiel der in den diagnostischen Erhebungen u. a. genutzten Aufgabe ‚100 Bonbons sollen bei einer Gruppe von Kindern fair geteilt werden‘ liegen die rekonstruierten, individuellen Situationsklassen ‚Sukzessives Verteilen‘ oder ‚Gleichmäßiges Austeilen‘ linearer und ‚Festes Aufteilen‘ oder ‚Festes Verteilen‘ antiproportionaler Zusammenhänge sprachlich und strukturell aus individueller Perspektive zumeist unbewusst dicht beieinander. Eine mögliche Hürde ergibt sich dann in der Verknüpfung der situativen und formalen Ebene hinsichtlich einer bewussten Entscheidung, ob in den Darstellungen einer Tabelle oder eines Graphen der Anfangswert zur unabhängigen Größe ‚0‘ oder ‚1‘ Relevanz für die gewählte, individuelle Situation hat. Die qualitative Analyse individueller Begründungen gibt Anhaltspunkte auf individuelle Verstehensschwierigkeiten bei der Identifizierung und Differenzierung linearer, proportionaler und antiproportionaler Zusammenhänge in Situationen und ihren zugehörigen Begriffen, die zur Konzipierung geeigneter Lehr-/Lernformate zur Überwindung spezifischer Hürden beitragen kann.

Literatur

Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (2012). Nachhaltig lernen durch aktives Systematisieren und Sichern - Konzept und Umsetzung in der mathewerkstatt. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012*, 93-96.

- Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 38(2), 86-95.
- Brandom, R. B. (2001). *Begründen und Begreifen. Eine Einführung in den Inferentialismus*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.
- Brandom, R. B. (2000). *Expressive Vernunft*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.
- De Bock, D., Van Dooren, W. & Verschaffel, L. (2015). Students' understanding of proportional, inverse proportional, and affine functions: two studies on the role of external representations. In: *International Journal of Science and Mathematics Education* 13(1), 47-69.
- Heiderich, S. & Hußmann, S. (2013). „Linear, proportional, antiproportional ... wie soll ich das denn alles auseinanderhalten“ – Funktionen verstehen mit Merksätzen?! In: H. Allmendinger, K. Lengnink, A. Vohns & G. Wickel (Hrsg.). *Mathematik verständlich unterrichten. Perspektiven für Unterricht und Lehrerbildung*, 27-46. Wiesbaden: Springer.
- Hußmann, S. (2013). *The theory of inferential structured (conceptual) webs of focuses, judgements and situations*. Available preprint, Technical University Dortmund, IEM.
- Hußmann, S., Thiele, J., Hinz, R., Prediger & S., Ralle, B. (2013). Gegenstandsorientierte Unterrichtsdesigns entwickeln und erforschen. Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. In: M. Komorek & S. Prediger (Hrsg.). *Der lange Weg zum Unterrichtsdesign. Zur Begründung und Umsetzung fachdidaktischer Forschungs- und Entwicklungsprogramme*, 25-42. Münster: Waxmann.
- Hußmann, S., Schacht, F. & Schindler, M. (2016). *An epistemological and inferential theory of concept formation processes – illustrated by an empirical study on decimal numbers*. A work in progress.
- Kurth, W. (1992). Proportionen und Antiproportionen. Untersuchungen zum funktionalen Denken von Schülern. In: *Journal für Mathematikdidaktik* 13(4), 311–343.
- Pratt, D. & Noss, R. (2002). The Microevolution of Mathematical Knowledge: The Case of Randomness. In: *The Journal of the Learning Sciences* 11(4), 453-488.
- Reinmann-Rothmeier, G. & Mandl, H. (2001). Unterrichten und Lernumgebungen gestalten. In: A. Krapp & B. Weidenmann (Hrsg.). *Pädagogische Psychologie. Ein Lehrbuch*, 601-646. Weinheim: Beltz.
- Suarez, A. (1977). *Formales Denken und Funktionsbegriff bei Jugendlichen. Funktionale Begriffsbildung und Strukturierung des Kontinuums als Alternative zum formallogischen Strukturalismus von Jean Piaget*. Bern: Hans Huber.
- Vergnaud, G. (1998). A Comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education. *Journal of mathematical behavior*, 17(2), 167-181.
- Vergnaud, G. (1997). The Nature of Mathematical Concepts. In: T. Nunes & P. Bryant (Hrsg.). *Learning and teaching Mathematics: An international Perspective*, 5-28. Hove (UK): Psychology Press.