Katrin SCHIFFER, Köln

Eine Schulbuchanalyse im Bereich der Algebra

In diesem Beitrag wird ein Ausschnitt einer Analyse der Schulbuchreihe „Elemente der Mathematik“ [EdM], Schroedel-Verlag, Auflage für Nordrhein-Westfalen, vorgestellt. Das Ziel dieser Schulbuchanalyse ist es, die Auffassung von Algebra zu identifizieren, welche innerhalb der Schulbücher vertreten wird und welche die Lernenden anhand des Arbeitens mit den Schulbüchern erlangen können. Die der Analyse zugrundeliegenden Fragestellungen lauten: Welches sind die Objekte der Schulalgebra? Wie wird mit diesen Objekten umgegangen? Welche impliziten und expliziten Begründungen enthalten die Schulbuchseiten? Dieser Beitrag konzentriert sich auf die letztgenannte Fragestellung. In der Schulbuchreihe kann das Vorgehen innerhalb des Themenbereichs der Algebra nicht isoliert betrachtet werden, sondern muss im Zusammenhang zu den bereits behandelten Themenbereichen gesetzt werden. Dazu wird im Folgenden zunächst die Einführung der Grundrechenarten und der Rechengesetze als Grundlage für die Behandlung des Rechnens mit Termen und Gleichungen dargelegt.

1. Rechnen mit natürlichen Zahlen

Aufbauend auf dem Wissen aus der Grundschule werden in der fünften Klasse die Addition und Subtraktion mit den jeweiligen Fachbegriffen eingeführt. Die Fachbegriffe werden erst jeweils an einem Zahlbeispiel benannt und dann im Anschluss geometrisch interpretiert. Dazu wird die Bedeutung von Addition und Subtraktion am Zahlenstrahl thematisiert. Die Addition wird als das Aneinanderlegen von Strecken dargestellt und an einem Beispiel demonstriert. An der Darstellung kann nachvollzogen werden, dass die aneinandergelegten Strecken für die Summanden dieselbe Gesamtlänge einnehmen, wie die Strecke deren Summe. Analog wird die Subtraktion als das Wegnehmen eines Teils einer Strecke von einer Gesamtstrecke interpretiert. Die Lernenden bilden anhand der Darstellungen eine geometrische Vorstellung im Größenbereich der Längen zu den beiden Grundrechenarten aus. Die Zahlen werden dabei als Strecken interpretiert.

In EdM 5 werden die Rechengesetze als „vorteilhaftes Rechnen“, d.h. als Rechentricks, motiviert (vgl. EdM 5, S. 66). In einem anschließenden Informationskasten wird das jeweilige Gesetz erst verbal, dann formal mit Hilfe von Variablen und zuletzt durch ein Zahlbeispiel formuliert. Die Begründung der Gültigkeit der Gesetze erfolgt im Größenbereich der Längen. Die geometrische Vorstellung der Addition dient als Begründungsgrundlage. An einem Zahlenbeispiel wird aufgezeigt, dass die aneinandergelegten

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

Strecken dieselbe Länge einnehmen, unabhängig von deren Reihenfolge. Für die Lernenden wird der exemplarische Charakter des Beispiels durch den angefügten Satz zum Assoziativgesetz betont: „Du erkennst: Ob du zuerst die Strecken für die Zahlen 21 und 18 oder zuerst die Strecken für die Zahlen 18 und 34 aneinandersetzt, das Ergebnis ist dasselbe. Diese Begründung ist für alle Zahlbeispiele möglich.“ (EdM 5, S. 67). Ebenso wie für die Addition werden auch die Rechengesetze der Multiplikation in einem konkretem Größenbereich induktiv begründet. Unter der Überschrift „Zur Begründung des Kommutativgesetzes“ findet sich die Darstellung eines Rechtecks, welches mit quadratischen Plättchen ausgelegt ist. Die Anzahl dieser Plättchen lässt sich sowohl durch die waagerechten als auch senkrechten Reihen beschreiben. Die Gültigkeit des Rechengesetzes wird durch die Beschreibungsgleichheit bezogen auf eine geometrische Figur erreicht. Analog wird das Assoziativgesetz durch die Beschreibungsgleichheit eines Quaders begründet.

Die Begründung der Gesetze an jeweils einem Beispiel in einem konkreten Größenbereich hebt die induktive und naturwissenschaftliche Vorgehensweise hervor. Daher stellen die geometrischen Darstellungen der Rechengesetze keine Veranschaulichung dar, sondern begründen ihre Allgemeingültigkeit.

2. Rechnen mit Termen

Die Einführung des Rechnens mit Termen erfolgt anhand einer Beispielaufgabe zur Bestimmung des Drahtverbrauchs für ein Schmuckstück (vgl. EdM 7, S. 246). Neben dieser Aufgabe ist eine aus regelmäßigen n-Ecken mit der Seitenlänge s zusammengesetzte Figur des Schmuckstücks abgebildet. In der Sachaufgabe werden zwei verschiedene Terme zur Bestimmung des Drahtverbrauchs aufgestellt. Die Lernenden sollen die Terme auf verschiedene Arten miteinander vergleichen. In der präsentierten Lösung zur Einstiegsaufgabe wird die Äquivalenz der Terme zunächst durch die Sachsituation begründet. Die beiden Terme sind beschreibungsgleich, da sie beide den Drahtverbrauch derselben geometrischen Figur beschreiben und die Terme sind einsetzungsgleich, da sie nach Einsetzung verschiedener Werte für s übereinstimmende Werte für die Gesamtlänge liefern. Diese induktive Vorgehensweise wird durch den Satz: „Dies ist anhand der Sachsituation klar.“ (EdM 7, S. 247) für die Lernenden verstärkt. Im nächsten Aufgabenteil sollen die Lernenden die Terme auch für negative Werte für s vergleichen. Der stattfindende inhaltliche Bruch zu der Sachsituation wird dabei nicht thematisiert. Dafür wird durch die Einsetzungsgleichheit gefolgert: „Auch bei der Einsetzung negativer Zahlen für s liefern die beiden Formeln jeweils denselben Wert.“ (EdM 7, S. 247). Im letzten Teil der Aufgabe wird eine allgemeine Begründung für die Gleichheit der Terme durch das Distributivgesetz gefordert. Die Notwendigkeit für eine allgemeine Begründung wird über die Unvollständigkeit der Wertetabelle der negativen Werte für s begründet. Die vorher gelieferte Begründung für positive Zahlen an der Sachsituation bleibt davon unberührt. In dem folgenden Informationskasten wird die Notwendigkeit von Regeln für ein begründetes Umformen noch einmal aufgegriffen. Dazu wird explizit geschrieben, dass das Einsetzten einiger Beispielwerte keinen Beweis darstellt, sondern nur Vermutungen liefert. Die Regeln für das begründete Umformen werden durch das Anwenden der Rechengesetze der Addition gerechtfertigt. Die Rechengesetze werden hierbei erst für das Rechnen mit Termen formuliert. Eine Begründung für die Gültigkeit der Rechengesetze selbst erfolgt nicht, diese ist nur implizit durch die Definition des Begriffs Term gegeben. Terme sind als Rechenausdrücke mit Variablen eingeführt worden in die Zahlen eingesetzt werden können. Daher sind Terme im Bereich der rationalen Zahlen verankert. Die dort gültigen Rechengesetze können somit auf das Rechnen mit Termen übertragen werden.

Die Multiplikation von Termen wird ebenfalls über eine Einstiegsaufgabe mit Lösung eingeführt (vgl. EdM 7, S. 256). In der Aufgabe sollen Terme zum Beschreiben des Flächeninhalts verschiedener geometrischer Figuren aufgestellt und vereinfacht werden. Das Rechnen mit den Termen wird dabei wieder über die Beschreibungsgleichheit begründet. Die Darstellung der Figuren, und damit verbunden die Sachsituation, liefert die Begründung der Termumformung für die positiven Zahlen. Diese wird in der Aufgabenstellung explizit als geometrische Begründung bezeichnet. Eine allgemeine Begründung auf Grundlage der Rechengesetze wird hier lediglich für die Erweiterung des Anwendungsbereichs der Termumformungen auf die negativen Zahlen verlangt. Die Regeln für die Termumformung werden dabei aus dem vorgestellten Beispiel gewonnen und als allgemeingültig gesetzt. Eine Begründung für die Gültigkeit der Rechengesetze für die Multiplikation bezogen auf Terme wird nicht gegeben, sondern ist ebenso wie die Begründung der Rechengesetze der Addition implizit in der Definition des Begriffs Term enthalten.

3. Lösen von Gleichungen

Bei der Einführung von Gleichungen werden den Lernenden zwei verschiedene Wege zur Bestimmung von Lösungen durch Umformung parallel vorgestellt (vgl. EdM 7, S. 264). Exemplarisch wird dazu die Lösung für den Term $3x + 4 = 10$ bestimmt. Die einzelnen Umfomungsschritte werden nebeneinander an einer Waage und an einem Zahlenstrahl ausgeführt. An der Waage steht x für ein unbekanntes Gewicht. Die Gleichheit der beiden

Terme wird durch das Gleichgewicht der Waage verdeutlicht. Die Zahlen 4 und 10 werden als Anzahlen der Einheitsgewichtsstücke interpretiert, die passend auf den Waagschalen liegen. Am Zahlenstrahl steht x für eine Position auf der Zahlengerade, welche ermittelt werden soll. Die linke Seite der Gleichung wird über dem Zahlenstrahl und die rechte Seite der Gleichung an der gleichen Position unter dem Zahlenstrahl dargestellt. Jeder Umformungsschritt wird anschließend parallel ausgeführt. Eine allgemeine Begründung für die Gültigkeit der Äquivalenzumformungen wird nicht gegeben. Daher stellen die Darstellungen der Gleichungsumformungen an der Waage und dem Zahlenstrahl die einzige ersichtliche Begründung ihrer Gültigkeit dar.

4. Auffassung von Algebra

Die Addition und Subtraktion von natürlichen Zahlen wird geometrisch begründet. Es wird die Vorstellung des Aneinanderlegens und Wegnehmens von Strecken für die Grundrechenarten aufgebaut. Diese geometrische Vorstellung bildet die Grundlage der Begründung der Gültigkeit der einzelnen Rechengesetze, welche ihrerseits später auf das Rechnen mit Termen übertragen werden. Das Rechnen mit Termen wird an einer Sachsituation eingeführt und anhand dieser durch die Beschreibungsgleichheit für positive Zahlen begründet. Die allgemeinen Regeln für die Termumformungen werden induktiv gewonnen. Eine Begründung der Regeln durch die Rechengesetze wird erst bei der Erweiterung des Anwendungsbereichs auf die negativen Zahlen gefordert. Das Vorgehen bei dem Begründen verschiedener Sachverhalte hat einen naturwissenschaftlichen induktiven Charakter. Die Analyse der Schulbuchreihe „Elemente der Mathematik“, nach den eingangs aufgeführten Fragestellungen, lässt den Schluss zu, dass die Lernenden eine anschauliche und gegenständliche Auffassung von Algebra erlangen (vgl. Schiffer 2015a & b). Diese wird durch das Begründen der Sachverhalte in den konkreten Größenbereichen verstärkt.

Literatur

Griesel, H., Postel, H. & Suhr, F. (2006): *Elemente der Mathematik 5. Sekundarstufe I.* Gymnasium, Nordrhein-Westfallen: Schroedel.

Griesel, H., Postel, H. & Suhr, F. (2007): *Elemente der Mathematik 7. Sekundarstufe I.* Gymnasium, Nordrhein-Westfallen: Schroedel.

Schiffer, K. (2015a): On the Understanding oft he Concept of Numbers in Euler's „Elements of Algebra“. In E. Barbin et al. (Hrsg.): *History and Epistemology in Mathematics Education, Proceedings of the 7th ESU*, S. 285 – 298.

Schiffer, K. (2015b): Schulbuchanalyse zum Umgang mit Variablen bei der Einführung von Termen und Gleichungen in der 7. Klasse, in: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 800 – 803.