Eva THANHEISER, Portland und Silke LADEL, Saarbrücken

Flexibles Verstehen der ganzen Zahlen und Operationen im Kontext der Grundschullehrerausbildung

Dieser Beitrag zeigt eindrücklich auf wie komplex die schriftlichen Rechenverfahren der Addition und Subtraktion in ihrem Verständnis sowohl für Kinder als auch für Lehramtsstudierende sind. Zur Erarbeitung dieser schriftlichen Rechenverfahren kommt der Analyse und der Arbeit mit didaktischen Materialien eine bedeutsame Rolle zu. Die Ergebnisse einer detaillierten Analyse weisen darauf hin, dass die Materialien ganz unterschiedliche Prinzipien unseres Zahlsystems fokussieren und erst die Summe der vorgestellten Materialien ein flexibles Verstehen der ganzen Zahlen und Operationen unterstützt. Insbesondere die Verknüpfung des Prinzips der Bündelung mit dem Prinzip des Stellenwerts ist hierfür entscheidend.

1. Zahlverständnis von Kindern und Lehramtsstudierenden

Der Zusammenhang zwischen verschiedenen Bündelungseinheiten (Einer, Zehner, Hunderter, etc.) ist nicht selbsterklärend. Allein die unterschiedlichen Wörter wie z.B. „Zehn“ und „Zehn*er*“ können zu Verständnisschwierigkeiten führen. So entwickeln Kinder häufig eine Vorstellung von Einern und Zehnern, in der diese in keiner Beziehung zueinander stehen (Cobb & Wheatley, 1988; Gaidoschik, 2014). Einer sind darin „klein“ und Zehner „groß“ (Ladel & Kortenkamp 2014). Die Ergebnisse der Untersuchungen von Kamii (1986) und Ross (1990) zeigen, dass nur etwa die Hälfte der Kinder in der vierten Klasse verstehen, dass die 1 in der Zahl 16 für 10 steht. Kouba & Wearne (2000) berichten, dass nur 60% der 8-Klässler in der Lage sind eine dreistellige Zahl zu schreiben, wenn ihnen Ziffern und Angaben zu deren Stellenwert gegeben werden.

Das fehlende Verständnis für den Zusammenhang verschiedener Bündelungseinheiten führt häufig zu einem verständnislosem Anwenden von Prozeduren und Algorithmen. Dies kann sich nachteilig auf Kinder auswirken (Ball, 1988/1989, Constance Kamii, 1986; Pesek und Kirshner, 2000). So lösten in einer Studie von Kamii (1994) Zweit- und Drittklässler, welche die Algorithmen nicht gelehrt bekommen hatten, die Aufgabe 504 – 306 erfolgreicher als Viertklässler, welche die Algorithmen gelernt hatten.

Bei den Lehramtsstudierenden sind die Ergebnisse ähnlich. Es mangelt ihnen an einem grundlegenden Verständnis unseres Zahlensystems und der schriftlichen Rechenverfahren (Ball, 1989; Ma, 1999; Ross, 2001; Zazkis & Khoury, 1993). Obwohl die meisten Lehramtsstudierenden die schriftlichen Rechenverfahren zwar durchführen können scheitern sie daran diese

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Mu□nster: WTM-Verlag

verständnisvoll zu erklären (Ball, 1988/1989; Ma, 1999). So sind laut Ross (2001) nur 53% der Lehramtsstudierenden in der Lage zu vermitteln, dass die 2 in 25, 20 repräsentiert.

Thanheiser (2014) unterscheidet aufgrund ihrer Untersuchungen vier unterschiedliche Typen der Zahlvorstellung bei Lehramtsstudierenden (Abb. 1). Typ 1 *Reference Units* und Typ 2 *Groups of Ones* entsprechen korrekten Vorstellungen, Typ 3 *Concatenated Digits* und Typ 4 *Concatenated Digits Plus* sind hingegen fehlerhaft.

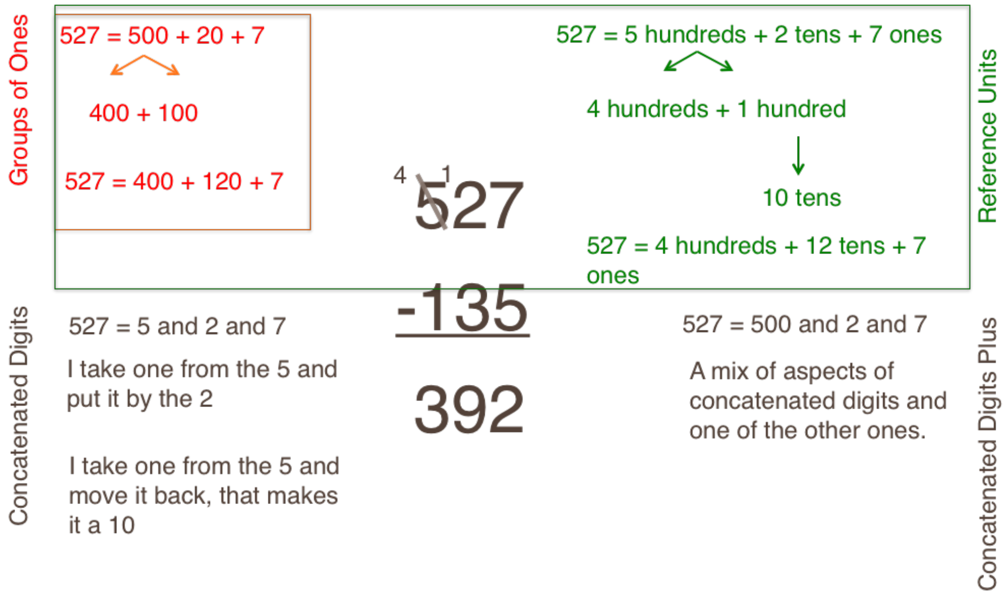


Abbildung 1: 4 Typen der Zahlvorstellung bei Lehramtsstudierenden

In Untersuchungen von 190 Lehramtsstudierenden sind 19% den *Reference Units* oder *Groups of Ones* zuzuordnen und 81% den *Concatenated Digits* bzw. *Concatenated Digits Plus*!

2. Ziffernwert – Stellenwert – Zahlenwert

Zur Erarbeitung eines verständnisvollen Umgangs mit Zahlen und Operationen sind Handlungen mit didaktisch gutem Material von besonderer Bedeutung. Hierzu werden im Folgenden die Montessori-Karten, das Mehrsystemmaterial sowie die App „Stellenwerttafel" (Kortenkamp 2012-2016) detailliert betrachtet (Tab. 1) sowie dabei die Begriffe *Ziffernwert, Stellenwert* und *Zahlenwert* geklärt.

Multipliziert man bei einer Zahl (z.B. 389) den Wert einer Ziffer (z.B. 3) mit dessen Stellenwert (hier: 100), so erhält man nach dem multiplikativen Prinzip deren Zahlenwert (hier: 300). Werden die Zahlenwerte addiert (hier: 300 + 80 + 9), so erhält man den Zahlenwert der ganzen Zahl (additives Prinzip). Zur Veranschaulichung und Fokussierung dieses additiven

Prinzips eignen sich die Montessori-Karten sehr gut. Diese sind so gestaltet, dass die Zahlenwerte der einzelnen Ziffern durch auseinanderschieben sichtbar gemacht werden können, bzw. das additive Prinzip durch Aufeinanderlegen der verschiedenen Zahlenwerte verdeutlich wird. Aufgrund ihrer symbolischen Repräsentationsform sind die Montessori-Karten einem hohen Abstraktionsniveau zuzuordnen. Diese Vorstellung von Zahlen entspricht dem Typ *Group of Ones*.

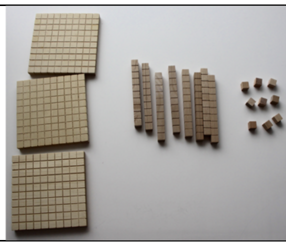
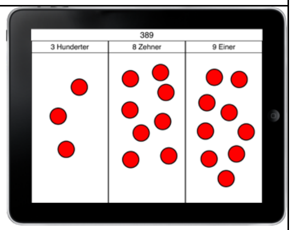
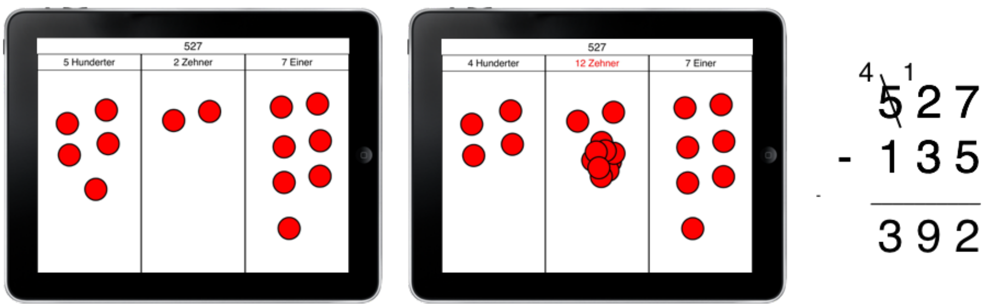
	Montessori-Karten	**Mehrsystem-material**	**App „Stellen-werttafel"**
Repräsentation der Zahl 389			
Repräsentationsform / Abstraktionsniveau	Symbolisch	Enaktiv mit Erhalt des Volumens	Symbolisch und enaktiv verknüpft mit einheitlichen Zählmarken
Direkte Verbindung der geschriebenen Zahl mit ihrem Zahlenwert	X		X
Sichtbare 10:1 Gruppierung		X	X

Tabelle 1: Material zur Förderung eines verständnisvollen Umgangs mit Zahlen und Operationen

Wird der Wert einer Ziffer (z.B. 3) zusammen mit dessen Stellenwert in Form der Bündelungseinheit genannt (hier: Hunderter), so erhält man die Zahlenwerte unter Angabe der Bündelungseinheit (z.B. 3 Hunderter). Dabei wird das Prinzip der Bündelung fokussiert. Zur Veranschaulichung eignet sich sehr gut das Mehrsystemmaterial. Die Bündelungseinheiten nach dem Dezimalsystem sind vorgegeben und die Handlung des Bündelns wird durch Tauschen vollzogen (vgl. Ladel 2014). Die Arbeit mit dem Mehrsystemmaterial entspricht einer sehr niedrigen Abstraktionsstufe, da das Material durch den Erhalt des Volumens gekennzeichnet ist und in der enaktiven Repräsentationsform damit gehandelt wird. Der Angabe von Bündelungseinheiten entspricht der Typ *Reference Units*.

Für einen verständnisvollen Umgang mit dem schriftlichen Additions- und Subtraktionsverfahren muss das Prinzip des Stellenwerts mit dem Prinzip der Bündelung verknüpft werden. Voraussetzung ist die vorherige Erarbeitung der beiden Prinzipien im Einzelnen und deren gesichertes Verständnis. Umgesetzt ist diese Verknüpfung sehr anschaulich in der App „Stellenwerttafel“. Ist die App so eingestellt, dass die Zahl angezeigt wird („Show total“), so ist auf einen Blick sichtbar, dass sich beim Verschieben eines Plättchens in eine andere Spalte nicht der Wert der Zahl ändert sondern deren Darstellung. Die symbolische Repräsentationsform ist dabei automatisch mit der enaktiven verknüpft. Das Material ist abstrakter als das Mehrsystemmaterial, da die Zählmarken nicht mehr den Erhalt des Volumens visualisieren, sondern wie die Ziffern auch gleichartig sind (Abb. 2).



527 = 5 H + 2 Z + 7 E = 4 H + 12 Z + 7 E

Abbildung 2: Entbündeln mit der App "Stellenwerttafel"

3. Ein Beispiel der Anwendung

In einem Seminar an einer Universität im Nordwesten der Vereinigen Staaten arbeiteten 19 Lehramtsstudierende über 6 Unterrichtsstunden (jeweils 3 Doppelstunden von 110 min) hinweg mit diesen drei Materialien. Es wurden Einzelinterviews geführt, schriftliche Arbeiten verfasst, Befragungen vorgenommen sowie Tests durchgeführt (nähere Informationen s. Thanheiser 2009; 2010; 2014; Thanheiser et al., 2013). Während vor dem Kurs noch lediglich 2 Lehramtsstudierende den Typen *Reference Units* und *Groups of Ones* zuzuordnen waren und 15 Lehramtsstudierende den Typen *Concatenated Digits* sowie *Concatenated Plus*, waren es abschließend 14 in den ersten beiden Typen und 5 in den zuletzt genannten.

Literatur

Die Literaturliste kann bei den Autorinnen angefragt werden.