

## Klippen in Problemlöseprozessen sichtbar machen

### Theoretischer Hintergrund

Nach Dörner besteht ein Problem aus: „1. Unerwünschter Anfangszustand  $s_\alpha$ ; 2. Erwünschter Endzustand  $s_\omega$ ; 3. Barriere, die die Transformation von  $s_\alpha$  in  $s_\omega$  im Moment verhindert.“ (Dörner 1976, S.10) Ein möglicher Verlauf eines solchen Transformationsprozesses wird von Pólya beschrieben: „Nach einem unproblematischen Anfang folgt er einem gewundenen Pfad, bis er in eine (...) Sackgasse gerät. Dann kehrt er um und verfolgt seinen Weg zurück, bemerkt (...) einen Seitenweg und geht diesem nach, gerät aber wieder in eine Sackgasse, die ihn wieder zum Umkehren nötigt. Und so fährt er fort (...) wenn er auch häufig umkehren und seine Schritte rückgängig machen muß, so schreitet er doch im großen ganzen, so hoffen wir wenigstens, in der richtigen Richtung fort.“ Pólya (1967, S. 116 f.)

Damit können wir einen Problemlöseprozess barrierebezogen in die Abschnitte BF (Barrierefrei), BE (Barriere erscheint), PV (Passageversuch) und NB (Nichtbarriere-Stadium) aufteilen, vgl. Gawlick (in diesem Band). Ebenso lässt sich eine Definition für Klippen ableiten: Eine *Klippe* ist eine Stelle auf dem bisherigen Lösungsweg, an der dem Probanden bewusst wird, in eine Sackgasse geraten zu sein. Diese Stelle erscheint dem Probanden damit als Barriere auf dem Weg zum Ziel.

In diesem Beitrag untersuchen wir am Beispiel der Problemaufgabe K10, welche Klippen im Bearbeitungsprozess denkbar sind und welche tatsächlich auftreten: Betrachten wir

#	Schritt	Begründung
1	$ y  = 90^\circ$	Satz des Thales: AB Durchmesser, $C \in k$
2	$ \alpha  +  \beta  +  \gamma  = 180^\circ$	IWS in ABC
3	$ \alpha  +  \beta  = 90^\circ$	1, 2
4	AM, BM WH	Satz vom Inkreis: M Inkreismittelpunkt (MPI)
5	$ \alpha_1  =  \alpha /2;  \beta_1  =  \beta /2$	4
6	$ \alpha_1  +  \beta_1  +  \mu  = 180^\circ$	IWS in ABM
7	$ \mu  = 180^\circ -  \alpha /2 -  \beta /2$	5, 6
8	$ \mu  = 180^\circ - (90^\circ/2) = 135^\circ$	3, 7

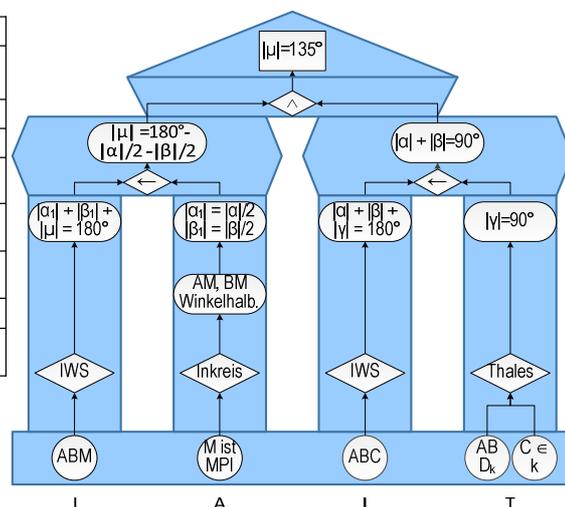
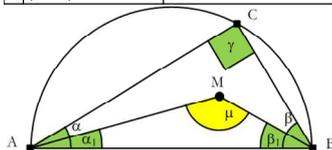


Abb. 1: Standardlösung, Lösungsgraph und Tempel von K10 (IWS: Innenwinkelsummensatz, WH: Winkelhalbierende)

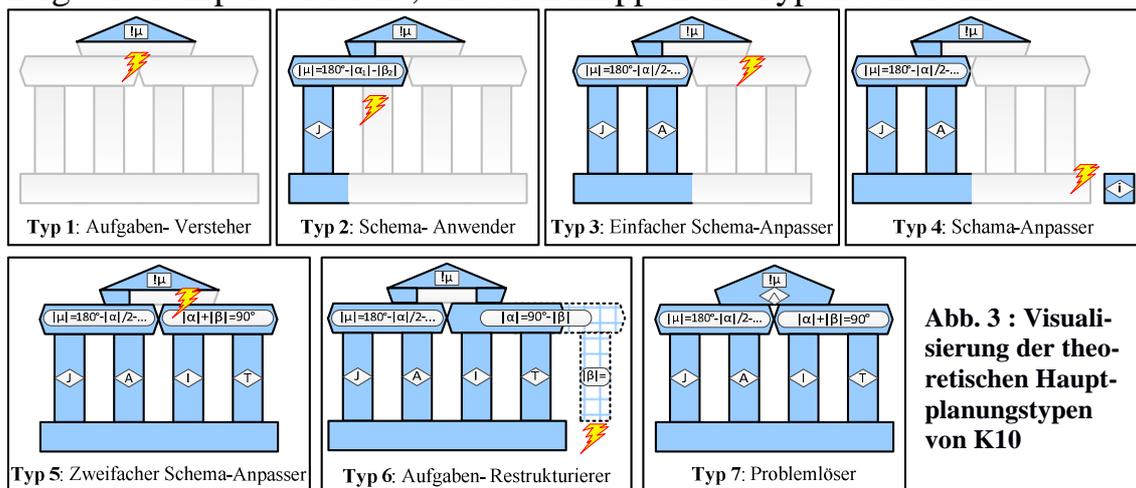
zunächst die Standardlösung von K10 (Gesucht ist die Größe des Winkels  $\mu = \angle AMB$ , wobei ABC ein Thalesdreieck und M der zugehörige Inkreismittelpunkt ist) und die Visualisierung als Tempel (Abb. 1). Wie man zu dieser Lösung kommen kann und welche Klippen dabei denkbar sind,

zeigt Abb. 2. Bis zu welchem Planungsschritt ein Bearbeiter tatsächlich kommt, wird dabei durch die Hauptplanungstypen beschrieben.

#	Heuristische Aktivität	Epistemische Aktivität	Klippe
1	Was ist unbekannt?	Der Winkel $\mu$ .	„Nun weiß ich nicht mehr weiter.“
2	Mit welchem Hilfsmittel (HM) oder Teilziel (TZ) kann ich $\mu$ bestimmen?	Mit dem IWS im Dreieck ABM: $ \mu  = 180^\circ -  \alpha_1  -  \beta_1 $	„Ich kenne ja gar nicht $\alpha_1$ oder $\beta_1$ .“
3	Mit welchem HM oder TZ kann ich $\alpha_1, \beta_1$ bestimmen?	M ist der Mittelpunkt des Inkreises, damit gilt $ \alpha_1  =  \alpha /2,  \beta_1  =  \beta /2$ . Und damit $ \mu  = 180^\circ -  \alpha /2 -  \beta /2$ .	„Ich kenne weder $\alpha$ noch $\beta$ .“
4	Mit welchem HM oder TZ kann ich $\alpha, \beta$ bestimmen?	Mit dem IWS im Dreieck ABC: $ \alpha  +  \beta  +  \gamma  = 180^\circ$	„Aber das bringt mir doch nichts.“
5	Mit welchem HM oder TZ kann ich $\gamma$ bestimmen?	AB ist der Durchmesser und C liegt C auf k, daher gilt mit SdT $ \gamma  = 90^\circ$ . Damit folgt $ \alpha  +  \beta  = 90^\circ$ .	„Ich weiß immer noch nicht, wie groß $\alpha$ oder $\beta$ ist.“
6	Kannst du dir andere Daten denken, die geeignet sind, die Unbekannte zu bestimmen?	Wenn $\beta$ gegeben wäre, so könnte ich $\alpha$ bestimmen, und damit dann auch $\mu$ .	„Das bringt nichts, $\beta$ ist ja nicht gegeben.“
7	Kannst Du die Aufgabe anders ausdrücken? Kannst Du sie auf noch verschiedene Weise ausdrücken?	Ich brauche $\alpha$ und $\beta$ gar nicht einzeln, ich kann die Summe verwenden.	

**Abb. 2: Lösungsplan für K10, auslösende heuristische Impulse und mögliche Klippen**

Lösungsprozesse von K10 werden hinsichtlich des Planungsverlaufs typisiert. Dazu wird der Bearbeitungsverlauf durch eine Tempelfolge beschrieben, vgl. Gawlick (in diesem Band), aus der die Folge der Planungstempel abgeleitet wird. Diese wird dann einem theoretischen *Hauptplanungstyp* zugeordnet: Die erste Klippe ist, überhaupt zu verstehen was gesucht ist - an ihr scheitert Typ 0, der Nicht-Versteher. Überwindet man sie, bemerkt aber direkt nach der Identifikation von  $\mu$ , dass man nicht mehr weiter weiß (zweite Klippe) so liegt Typ 1: Aufgaben-Versteher vor. Schafft man es doch, einen Plan aufzustellen ( $\mu$  mit IWS), gerät dann in eine Sackgasse (dritte Klippe) und scheitert, so ist man vom Typ 2: Schema-Anwender usw. Diese Pläne können mit Tempelbildern visualisiert werden. Abb. 3 zeigt die Tempel der Pläne, an deren Klippen die Typen scheitern.



**Abb. 3 : Visualisierung der theoretischen Hauptplanungstypen von K10**

### Welche Klippen treten tatsächlich auf?

All diese Typen treten in der Praxis tatsächlich auf! In vielen Prozessen tritt

genau eine Barriere auf, daher beschrieben wir diese durch das Quadrupel der finalen Tempel der Abschnitte BF, BE, PV, NB. Aus Platzgründen betrachten wir lediglich drei Prozesse aus HeuRekAP (Gawlick 2014):

**Der Fall A05** Zu Beginn identifiziert A05 die gegebene Thales-Situation und folgert  $|\gamma|=90^\circ$ . Dies verwendet er nicht weiter – ein Thales-Baustein wird neben dem Tempel bereitgelegt (Abb. 5 – A05, BF). Danach identifiziert er  $\mu$  und stößt sogleich auf eine Klippe – er weiß nicht, wie er weiter vorgehen soll (Abb. 5 – A05, BE). Diese versucht er mit dem Plan den Kosinussatz umzuformen zu passieren, scheitert allerdings (Abb. 5 – A05, PV). Daraufhin misst er  $\mu$  (Abb. 5 – A05, NB:LF). Betrachten wir das Tempelbildquadrupel (Abb.7 –A05), so fällt auf, dass dies ohne das zusätzliche Baumaterial jeweils recht gut einem der Hauptplanungstypen entspricht. Bei der Typisierung berücksichtigen wir das Baumaterial aber doch: Obwohl der Lösungsplan von A05 keine erfolgreiche Schemaanwendung enthält, zeigt der Thales-Baustein, dass A05 in der Lage ist ein Schema anzuwenden – ihm wird Typ 2: Schema-Anwender zugeschrieben.

**Der Fall A32** Direkt zu Beginn merkt A32 an, dass  $|\gamma|=90^\circ$  ist, wegen dem Satz des Thales. Danach identifiziert er  $\mu$  und erkennt die WH-Eigenschaft (Abb. 5 – A32, BF). Damit formuliert er einen Lösungsplan ( $\mu$  mit dem IWS berechnen und WH-Eigenschaft berücksichtigen) und stößt sogleich auf eine Klippe: Er weiß nicht, wie er  $\alpha$  und  $\beta$  bestimmen kann (Abb. 5 – A32, BE). In PV gelingt es ihm seinen Plan weiterzuentwickeln (Abb. 4). Er erkennt aber, dass er ihn so nicht durchführen kann und versucht erfolglos ihn zu restrukturieren. Da keine epistemischen Aktivitäten folgen, wird im NB-Abschnitt kein Tempel visualisiert. Vergleichen wir das Quadrupel von A32 wieder mit den Hauptplanungstypen, so fällt auf, dass diese im Vergleich zu der Folge von A05 ähnlicher ist. Der finale BF-Tempel entspricht im Wesentlichen dem Tempel von Typ 1, der BE-Tempel entspricht, bis auf den Thales-Baustein, dem von Typ 3. In PV baut A32 den Tempel weiter auf (Typ 6). Die Bearbeitung des Probanden kann damit Typ 6: Aufgaben-Restrukturierer zugeordnet werden.

Wenn man <sup>nach</sup> einen anderen Winkel als C hat, kann man durch den Innenwinkelsatz den letzten fehlenden bestimmen. Da die Winkel in AMB bei A und B nur halb so groß wie in ADC, kann man  $\alpha$  von ABC und  $\beta$  von ABC durch zwei teilen und mit dem Innenwinkelsatz  $\gamma$  bestimmen.

**Abb. 4: Ausschnitt der K10-Bearbeitung von A32**

**Der Fall D11** (Eine detailliertere Darstellung des Bearbeitungsprozesses von D11 findet sich in Gawlick & Lucyga (2014).) Der Bearbeitungsprozess von D11 verläuft bis zum Erreichen der Barriere recht ähnlich wie der Prozess von A32 (vgl. Abb. 5). Nach dem Erreichen derselben Klippe wie A32 versucht D11 diese zu passieren, indem er viele verschiedene Gleichungen aufstellt. D11 stellt die Gleichungen auf, um seinen Plan grundle-

gend umzuarbeiten, daher sind die entsprechenden Säulen magenta gefärbt (Abb. 5 – D11, PV). Letztendlich gelingt es ihm seinen Plan umzustrukturieren – er wechselt in eine algebraische Betrachtungsweise. Er stellt die Gleichung  $2|\alpha_1|+2|\beta_1|=90^\circ$  nach  $\alpha_1$  um, setzt dies in  $|\mu|=180^\circ-|\alpha_1|-|\beta_1|$  ein und löst damit K10 (Abb. 5 –D11, NB:LG). Vergleichen wir das Quadrupel wieder mit den Hauptplanungstypen: Der BF-Tempel entspricht im Wesentlichen dem Tempel von Typ 2, der BE-Tempel dem von Typ 3. Der PV-Tempel entspricht am ehesten Typ 5, wohingegen der NB-Tempel dem Tempel des Problemlösers (Typ 7) entspricht. Insgesamt lässt die Bearbeitung von D11 darauf schließen, dass D11 ein Problemlöser (Typ 7) ist.

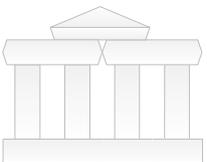
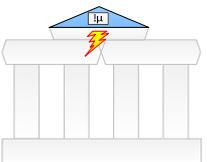
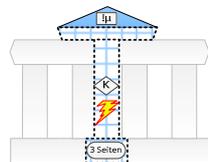
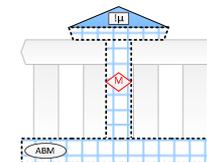
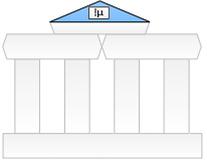
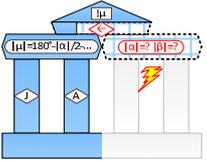
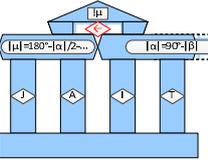
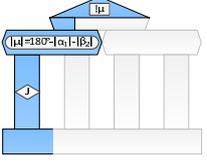
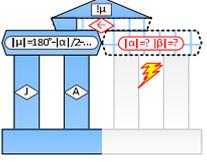
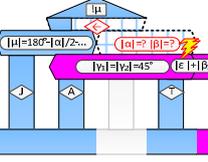
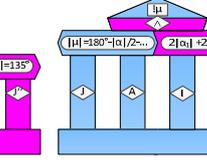
	BF	BE	PV	NB
A05 Typ 2: Schema- Anwender	 Typ 0	 Typ 1	 Typ 2	 Typ 2
A32 Typ 6: Schema- Restruktu- rierer	 Typ 1	 Typ 3	 Typ 6	
D11 Typ 7: Problemlö- ser	 Typ 2	 Typ 3	 Typ 5	 Typ 7

Abb. 5: Visualisierung der Bearbeitungsprozesse mit Tempelbildquadrupeln

## Fazit

Wir haben gezeigt, dass sich die betrachteten Probanden den theoretischen Hauptplanungstypen zuordnen lassen. Darüber hinaus haben wir gesehen, dass Tempelbilder eine strukturierte und übersichtliche Prozessdarstellung ermöglichen, v.a. wenn die finalen Tempelbilder eines jeden Abschnitts betrachtet werden. Mit dieser Darstellung können Problemlöseprozesse leicht vergleichbar gemacht werden und Klippen werden sichtbar. Mit Tempeln lassen sich damit sowohl Klippen, als auch die Arten des Umgangs damit beschreiben. Dies wiederum lässt sich als Ausdruck einer Kompetenzstufe (vgl. Gawlick & Lucyga (eingereicht)) interpretieren.

## Literatur

Siehe Langfassung auf der Homepage bzw. MU 4/17.