

DiaLeCo – Lernen mit dynamischen Multirepräsentationen von Funktionen

Was am Computerbildschirm zu sehen ist und was mathematisch tatsächlich gemeint ist, muss nicht immer übereinstimmen. Dynamisierte multiple Repräsentationen können sogar Anlass zu visuellen Vorstellungen geben, die der Sache nicht zuträglich sind. Das Projekt DiaLeCo der PH Heidelberg geht der Frage nach, wie diesbezügliche Lernhürden diagnostiziert und abgebaut werden können.

Wahrnehmungsfallen beim Betrachten dynamisierter Graphen

Öffnen Sie eine dynamische Mathematiksoftware, fügen Sie ihr einen Schieberegler a hinzu und plotten dann den Graphen von $f(x) = x^2 + a$. Vergrößern Sie den Wert von a und betrachten Sie die Änderungen beim Graphen genau. Er bewegt sich durchaus nach oben, aber scheint er nicht auch enger zu werden? Eine Studentin der PH Heidelberg hatte genau diesen Eindruck (Pinkernell 2015). Sie wusste auch, dass ihre Wahrnehmung des sich bewegenden Graphen dem widersprach, was sie in der Schule gelernt hatte: Die „Öffnung“ der Parabel wird durch einen Faktor vor dem quadratischen Teilterm in der Funktionsgleichung bestimmt, so hatte sie es gelernt. Aber da war keiner.

Forschungsfragen

Das Beobachten der Bewegungen von Graphen in einem Softwarefenster lädt zu anderen Wahrnehmungen ein als bei statischem Material. Unsere unmittelbare Interpretation der visuellen Information werden durch Oberflächeneigenschaften des Stimulus beeinflusst, die dem dargestellten mathematischen Sachverhalt widersprechen kann. Das kann die Ausbildung eines sachadäquaten Begriffes des repräsentierten Lerngegenstands behindern. Hieraus ergeben sich für uns zwei Fragen, die zunächst auf theoretischer Ebene geklärt werden müssen:

1. kognitionspsychologische Perspektive: Wie lässt sich der Widerspruch zwischen Wahrnehmungsbild und „besserem Wissen“ erklären
2. fachliche Perspektive: Wie kann sich eine verständige Deutung einer dynamischen multiplen Repräsentation einer Funktion zeigen?

Beiden Fragen soll im Folgenden nachgegangen werden. Es sind Teilfragen eines umfassenderen Forschungsvorhabens, welches das Heidelberger Projekt DiaLeCo – Diagnose typischer Hürden beim Lernen mit computer-gestützten Multirepräsentationsumgebungen – verfolgt.

Kognitionspsychologische Perspektive

Wenn man im Eingangsbeispiel die Funktion $f(x) = x^2 + a$ durch die Funktion $f(x) = x + a$ ersetzt, erhält man eine Gerade, deren Bewegung in der Koordinatenebene bei Änderung von a unterschiedlich gesehen werden kann. Unter einer bestimmter Betrachtungsweise bewegt sie sich vertikal, unter einer anderen horizontal. Möglich ist auch die Wahrnehmung der Bewegung als eine diagonale durch das Softwarefenster. Das erinnert an bestimmte optische Täuschungen, die einander ausschließende Wahrnehmungen desselben Stimulus erlauben, wie z. B. den Neckerwürfel.

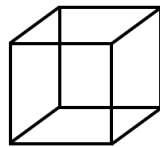


Abbildung 1

In seiner Analyse der Informationsverarbeitung von bildhaften Informationen unterscheidet Palmer (1975) zwischen parametrischen (Farbe, Größe, etc.) und strukturellen Informationen (Figur-Grund, Beziehungen zwischen Teilelementen, etc.). Hat ein Betrachter den Eindruck, dass sich die Farbe ändert, muss sich diese im Stimulus geändert haben. Hat er den Eindruck, dass sich Relationen zwischen bestimmten Teilelementen geändert haben, muss das im Stimulus nicht der Fall sein. Ob man den Neckerwürfel von oben oder von unten sieht entscheidet sich im Kopf des Betrachters, nicht in der Abbildung (Abb. 1). Bildhafte Darstellungen sind mit Blick auf strukturelle Informationen ambivalent. Eine sachadäquate Deutung einer bildhaften Repräsentation muss sich durch weitere Informationen ergeben. In einer Multirepräsentationsumgebung sind dies die weiteren Repräsentationen desselben Sachverhalts.

In ihrer Theorie der Verarbeitung multipler externer Repräsentationen von Informationen beschreiben Schnotz und Bannert (2003) das „mentale Modell“ als die kognitive Instanz, die als erste den externen Stimulus sinngebend interpretiert. Die Sinnkonstruktion wird dabei durch vorhandene kognitive Schemata unterstützt, die im Moment der Informationsverarbeitung instantiiert werden (vgl. Dutke, 1994). Bei der Verarbeitung logischer Bilder, i. e. Graphen oder Diagramme, sind dies sogenannte graphische Schemata. Der von uns betrachteten dynamischen Softwareumgebung bildet eine externe multiple logische Repräsentation des funktionalen Zusammenhangs zwischen a und $f(x)+a$, für deren sachadäquate Interpretation es ein geeignetes „graphisches Schema“ braucht. Seine Ausformung ist Gegenstand didaktischer Bemühungen, die eine fachliche Analyse der dynamischen multirepräsentationalen Lernumgebung voraussetzt.

Fachliche Perspektive

Ein mathematisches Objekt ist im wesentlichen abstrakter Natur. Ein verständiger Zugang zum mathematischen Objekt namens „Funktion“ kann nur über seine Repräsentationen erfolgen. Duval folgend (1999) heißt dies, mit den verschiedenen Standardrepräsentationsformen Term, Tabelle und Graph korrekt umgehen und zwischen ihnen nach Bedarf kohärent wechseln zu können. Regelhaftes Wissen über das Wechseln zwischen Term, Tabelle und Graph reicht aber nicht aus. Die Studentin aus dem Eingangsbeispiel wusste zwar, dass der Parameter a in $f(x) = x^2 + a$ eine vertikale Verschiebung der Normalparabel um a LE angibt. Nur konnte sie ihr Wissen über die Zusammenhänge von Parametern in Funktionsgleichungen und Gestalt und Position der zugehörigen Graphen in dem Moment nicht mehr anwenden, als die sonst so gewohnten statischen Repräsentationen auf dem Computerbildschirm plötzlich lebendig wurden.

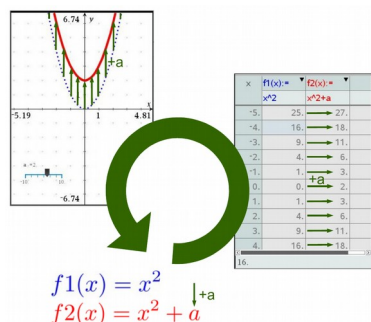


Abbildung 2

Alle drei Repräsentationsformen – die algebraische, die numerische und die graphische – sind semiotische Systeme, die sich bzgl. ihrer Syntax und der jeweils verwendeten Symbole fundamental unterscheiden. Und doch bildet jede denselben Zusammenhang zwischen a und $f(x)+a$ ab. Das Wissen, das sich aus der Betrachtung der Informationen in einer Repräsentationsform ergibt, erweist sich erst dann als valide, wenn es durch Übersetzung des Wissens erklärt wird, das sich aus der Betrachtung der anderen Repräsentationsformen ergibt. Das ist, was Duval (1999) als Verstehen der abgebildeten Zusammenhänge beschrieb. Hier ist es die Wirkung des Parameterwerts, der in Term, Tabelle und Graph unterschiedliche Gestalt annimmt: In der algebraischen Repräsentation ist es der Operator $+a$, in der numerischen ist es die immer gleiche Differenz zwischen benachbarten Zellen der Wertetabellen von $f(x)$ und $f(x)+a$, und in der geometrischen ist es der gleichbleibende vertikale Abstand zwischen den entsprechenden Punkten der beiden Graphen (Abb. 2).

Dieses Kondensieren der jeweils systemspezifischen Informationen über Relationen zwischen Tabellenwerten oder Punktkoordinaten auf die reine

strukturelle Information der invarianten Differenz zwischen den $f(x_i)$ und $f(x_i)+a$ kann als Abstraktion bezeichnet werden. Dies ist ein Lernen, das durch ein kohärentes, weil verständiges Aufeinanderbeziehen von solchen Informationen geschieht, die an der Oberfläche keine Gemeinsamkeiten aufweisen. Ein solches Lernen lässt sich durch das Modell der theoretischen Abstraktion beschreiben (Davydov 1972, Dreyfus 2012). Für die Verarbeitung multipler Informationsrepräsentationen braucht es diesem Modell zufolge eine erkenntnisleitende theoriebasierte Idee *a priori*, die ein Identifizieren von Analogien in den Tiefenstrukturen der verschiedenen Repräsentationsformen lässt. Wie eine solche für das Lernen mit dynamischen multiplen Repräsentationsumgebungen zu konkretisieren wäre steht noch offen. Bis dato erscheint uns die folgende Formulierung mit Blick auf die vorangegangenen Überlegungen die naheliegendste: Der Analyseauftrag bzw. das Deutungsschema wäre ein Identifizieren des variablen Parameterwerts als strukturanaloge Invariante beim Wechsel zwischen den drei Repräsentationsformen, wobei der algebraischen Repräsentationsform eine deutungsleitende Funktion zukommt.

Literatur

- Davydov, V. V. (1972). Über das Verhältnis zwischen abstrakten und konkreten Kenntnissen. In J. Lompscher (Hrsg.), *Probleme der Ausbildung geistiger Handlungen. Neuere Untersuchungen zur Anwendung der Lerntheorien Galperins*. Berlin: Volk und Wissen Volkseigener Verlag.
- Dreyfus, T. (2012). Constructing Abstract Mathematical Knowledge in Context. In Sung Je Cho (Hrsg.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. Seoul, South Korea.
- Dutke, S. (1994). *Mentale Modelle: Konstrukte des Wissens und Verstehens: kognitionspsychologische Grundlagen für die Software-Ergonomie*. Göttingen: Verlag für Angewandte Psychologie.
- Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization. In F. Hitt & M. Santos (Hrsg.), *Proceedings of the Twenty-first Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. I, pp. 3–26). Mexico.
- Palmer, S. E. (1975). The nature of perceptual representation: An examination of the analog/propositional controversy. In *Proceedings of the 1975 workshop on Theoretical issues in natural language processing* (pp. 151–159). Association for Computational Linguistics.
- Pinkernell, G. (2015). Reasoning with dynamically linked multiple representations of functions (pp. 2531–2537). In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME9, 4-8 February 2015)* (pp. 2531-2537). Prague, Czech Republic
- Schnotz, W., & Bannert, M. (2003). Construction and interference in learning from multiple representation. *Learning and Instruction*, 13, 141–156.