

Komplexe Modellierung: Solarenergieforschung mit GeoGebra

Der Energiesektor befindet sich momentan in einem großen Umbruch. Der Ausstieg aus der Kernenergie und die Forderung nach umweltschonenden Energiequellen rücken u.a. solarthermische Kraftwerke, die besonders gut in sonnenreichen Ländern eingesetzt werden können, in den Vordergrund. Diese sind somit Teil aktueller Forschung im Bereich der Energiegewinnung. Beim Bau solcher Kraftwerke möchte man möglichst wirtschaftlich sein, d.h. man möchte die vorhandene Sonneneinstrahlung optimal ausnutzen. Lösungsansätze für diese Problematik können Schüler/innen im Schülerlabor CAMMP für Mathematische Modellierung der RWTH Aachen (www.cammp.rwth-aachen.de) erforschen. So sollen Schüler/innen einerseits für die gesellschaftlich höchst bedeutsame Nachhaltigkeitsthematik sensibilisiert werden und in diesem Zusammenhang die Relevanz von Mathematik erfahren. Im Rahmen einer Fortbildung konnten auf der GDM 2017 Interessierte einen Blick auf das Thema Mathematische Modellierung eines Solarkraftwerks mit GeoGebra werfen und so Material im Bereich der realistischen mathematischen Modellierung zum Einsatz im Unterricht kennenlernen.

Betrachtet werden solarthermische Kraftwerke, die mittels langer ebener Spiegel, sogenannter Fresnelspiegel, das Sonnenlicht auf ein Absorberrohr konzentrieren und somit das im Rohr enthaltene Wasser erhitzen. Auf diese Weise entsteht Wasserdampf, welcher eine Turbine zur Stromerzeugung antreibt. Ein Sekundärreflektor, welcher um das Absorberrohr herum angebracht ist, sorgt dafür, dass auch Sonnenstrahlen, die unmittelbar am Rohr vorbeigehen, auf das Rohr reflektiert werden (vgl. Abb. 2: Modell eines Spiegels).

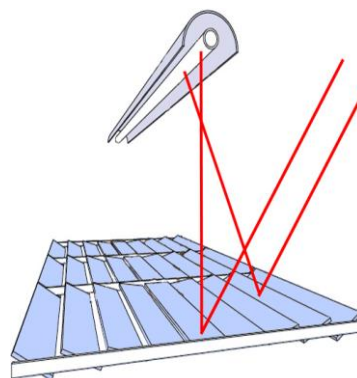


Abb. 1: links: Solarfeld eines Fresnelsolarkraftwerks (Quelle: Novatec Solar GmbH); rechts: Modell eines Solarfeldes eines Fresnelsolarkraftwerks

Im Workshop erarbeiten Mathematikurse der Mittel- und Oberstufe einen Tag lang weitgehend eigenständig ein mathematisches Modell zur Energiegewinnung anhand eines Fresnelkraftwerks. Dazu verwenden sie echte Daten, welche von einem Solarkraftwerk in Kalifornien stammen und von der Firma Novatec Solar GmbH zur Verfügung gestellt wurden. Die Daten sind so in einem GeoGebra-Worksheet aufbereitet, dass die Schüler/innen die entscheidenden Modellierungsschritte selbst ergänzen müssen. GeoGebra eignet sich an dieser Stelle besonders gut, da die Software häufig bereits aus der Schule bekannt ist und der Einsatz im Modellierungsworkshop damit kaum eine kognitive Barriere in der Modellierungsspirale darstellt. GeoGebra bietet weiterhin die Möglichkeit, die vorliegende geometrische Fragestellung durch Schaubilder zu unterstützen und die Ergebnisse in Simulationen zu visualisieren. Zusätzlich werden über eine direkte sprachliche Rückmeldung das Ergebnis bewertet und ggf. kleine Tipps eingeblendet. Die Anregung zum wiederholten Durchlaufen des Modellierungskreislaufs findet damit auf zwei Ebenen – der sprachlichen und der visuellen – statt. Jüngeren Schüler/innen steht außerdem ein gegenständliches Modell zum experimentellen Erfahren des mathematischen Problems zur Verfügung. Die Schüler/innen erleben so eine authentische und relevante Modellierungsaufgabe (vgl. Maaß 2010). Die mathematischen Inhalte wurde bereits ausführlicher in Hattebuhr, Frank und Roeckerath (2015) erarbeitet, sollen hier jedoch in Bezug zum Einsatz im Unterricht vorgestellt werden.

Im Rahmen des Workshops wird zunächst der Frage nachgegangen, wie ein Spiegel in Abhängigkeit vom aktuellen Sonnenstand ausgerichtet werden muss, damit ein Sonnenstrahl, der am Spiegelmittelpunkt reflektiert wird, das Absorberrohr trifft. Dazu werden die folgenden Modellannahmen vorgenommen (vgl. Abb. 2): Alle Betrachtungen sollen im 2-Dimensionalen stattfinden, wobei eine Übertragung ins 3-Dimensionale in einer Erweiterung möglich ist. Es wird weiter angenommen, dass alle Sonnenstrahlen parallel einfallen und alle Strahlen, die von unten auf den Sekundärreflektor fallen, auf das Absorberrohr reflektiert werden. Außerdem wird zunächst nur ein Spiegel betrachtet, dessen Spiegelmittelpunkt direkt unter dem Rohr steht.

Zur mathematischen Beschreibung wird der Sonneneinfallswinkel mit α bezeichnet. Weiter wird der Spiegelneigungswinkel zwischen der Horizontalen und der Spiegelnormalen im Spiegelmittelpunkt mit γ sowie der Winkel zwischen dem reflektierten Sonnenstrahl und der Horizontalen mit β bezeichnet.

Für den einfachen Fall, dass der Spiegel direkt unter dem Absorberrohr steht, ist $\beta = \frac{\pi}{2}$. Gesucht ist also der Neigungswinkel γ in Abhängigkeit vom Sonneneinfallswinkel α . Aus der Physik ist bekannt, dass der Einfallswinkel und

der Ausfallswinkel gleich groß sind. Unter Ausnutzung einfacher Winkelbeziehungen erhält man $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$.

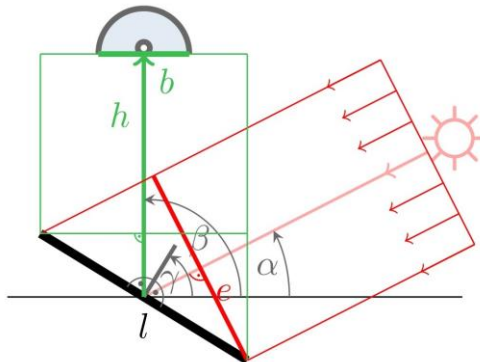


Abb. 2: Modell eines Spiegels: in rot: einfallendes Sonnenband; in grün: reflektiertes Sonnenband; Sonneneinfallswinkel α ; Reflexionswinkel β ; Normalenwinkel γ ; Sekundärreflektorbreite b ; Sonnenbandbreite e ; Spiegelbreite l

Nachdem der Spiegel richtig ausgerichtet ist, möchte man wissen, welche Leistung am Absorberrohr anliegt. Dazu ist zunächst die Leistung L_S pro Meter, die am Spiegel anliegt, zu modellieren. Anschließend ist der Anteil a des reflektierten Strahlenpakets, das den Sekundärreflektor trifft, zu ermitteln, um abschließend aus diesen beiden Ergebnissen die am Absorberrohr anliegende Leistung L_R zu bestimmen.

Es sind nun die Breite l des Spiegels und die Leistung L der Sonnenstrahlung pro Meter gegeben. Durch Anwenden von Winkelsätzen kann die Sonnenbandbreite e durch $e = l \cdot \cos(\gamma - \alpha)$ ermittelt werden. Daraus erhalten wir für die am Spiegel anliegende Leistung $L_S = e \cdot L$.

Auch das reflektierte Strahlenbündel hat die Breite e und damit die Leistung L_S . Da die Strahlen auf der gesamten Breite b des Sekundärreflektors senkrecht einfallen, kann der Anteil a des reflektierten Strahlenbündels, das den Sekundärreflektor und damit das Absorberrohr trifft, durch $a = \min\{1, b/e\}$ beschrieben werden. Die am Absorberrohr ankommende Leistung L_R lässt sich nun mit $L_R = a \cdot L_S$ berechnen.

Im nächsten Schritt soll ein seitlich verschobener Spiegel modelliert werden (vgl. Abb. 3). Die Verschiebung des Spiegelmittelpunktes sei mit d und die Höhe des Absorberrohrs mit h bezeichnet. Unter Verwendung des Tangens erhält man

$$\beta = \begin{cases} \arctan \frac{h}{d}, & d < 0 \\ \pi/2, & d = 0. \\ \pi - \arctan \frac{h}{d}, & d > 0 \end{cases}$$

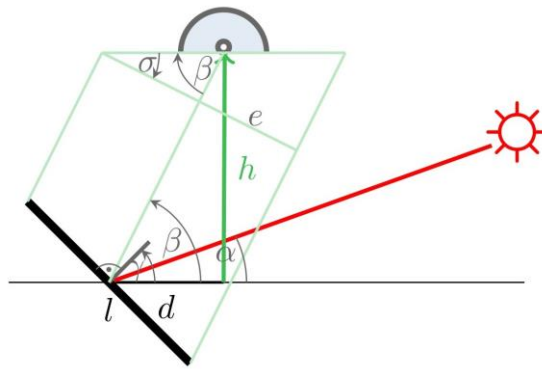


Abb. 3: Modell eines um d verschobenen Spiegels: Sonneneinfallswinkel α ; Reflexionswinkel β ; Normalenwinkel γ ; Sonnenbandbreite e ; Spiegelbreite l ; Spiegelverschiebung d ; Absorberrohrhöhe h

Mit β lässt sich der Neigungswinkel γ auch im Falle des verschobenen Spiegels mit $\gamma = 1/2(\alpha + \beta)$ bestimmen. Die Berechnung der auf dem Spiegel einfallenden Sonnenleistung verändert sich nicht. Es gilt $L_S = e \cdot L$ mit $e = l \cdot \cos(\gamma - \alpha)$. Der Anteil a des reflektierten Strahlenbündels, welches den Sekundärreflektor trifft, wird berechnet mit $a = \min\{1, b \cdot \cos \sigma / e\}$, wobei $\sigma = |\beta - \pi/2|$. Die am Absorberrohr ankommende Leistung L_R lässt sich nun wie zuvor mit $L_R = a \cdot L_S$ bestimmen.

Die bisher vorgestellten Inhalte wurden mehrfach im Rahmen eines Projekt-tages, der etwa vier reine Arbeitsstunden umfasst, von Schulklassen ab der achten Jahrgangsstufe erfolgreich bearbeitet. Vorgeschlagen wird die Einbettung des Workshops in die Unterrichtseinheit zu den Winkelsätzen. Eine Erweiterung des Moduls ist durch verschiedene Ergänzungen möglich. Das Modell kann um mehrere Spiegel erweitert werden oder es können Reflexionsstörungen durch Wind oder Sand einbezogen werden. Interessant ist auch eine Modellierung der pro Tag oder pro Jahr eingefangenen Energie, sowie der Entwicklung von Optimierungsstrategien.

Literatur

- Frank, M. & Roeckerath, C. (2012). Gemeinsam mit Profis reale Probleme lösen. *Mathematik Lehren*, Heft 174, S. 59 - 61.
- Hattebuhr, M., Frank, M. & Roeckerath, C. (2015). Optimierung der Spiegel in einem Solarkraftwerk – Projekttag des EducationLabs CAMMP der RWTH Aachen. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*, Band 1, S. 356-359.
- Maaß, K. (2010) Classification scheme for modelling tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(2): S. 285-311.
- Mertins, M. (2009): *Technische und wirtschaftliche Analyse von horizontalen Fresnel-Kollektoren*, Universität Karlsruhe (TH). Dissertation.
- Roeckerath, C. (2012): *Mathematische Modellierung der Spiegel eines solarthermischen Kraftwerks im Rahmen einer Modellierungswoche und einer Projektwoche in der Sekundarstufe II*. Schriftliche Hausarbeit im Rahmen der Zweiten Staatsprüfung für das Lehramt an Gymnasien und Gesamtschulen.