Karl Josef FUCHS & Gregor MILICIC Salzburg

Experimentieren in einem Unterricht mit Technologie – Welche Methoden bieten sich an?

1. Modellieren und Programmieren als fachdidaktische Basiskonzepte

Der Beitrag ist eine Aufarbeitung methodisch-didaktischer Überlegungen, die bei der Planung bzw. Durchführung des Unterrichts im Rahmen des Sparkling Science Projekts EMMA (Experimentieren Mit Mathematischen Algorithmen) eine Rolle spielten. Inhalte des Kurses waren Themen der Numerischen bzw. Diskreten Mathematik. In diesem Beitrag fokussieren wir jedoch ausschließlich auf die Themen der Numerischen Mathematik, nämlich auf numerische Lösungsverfahren für Variationsungleichungen. Durchgeführt wurde der Unterricht, der alle zwei Wochen in einem Ausmaß von 90-120 Minuten stattfand, als fächerüberschreitendes Angebot für Schüler der Sekundarstufe II. Zudem fanden am Ende des Schuljahrs 2014/15 im Bundesinstitut für Erwachsenenbildung in Strobl am Wolfgangsee/Österreich sowie am Ende des Schuljahrs 2015/16 im Mathematics Village in Şirince/Türkei Workshops von zirka einer Woche statt (EMMA 2018).

Als Basiskonzept für die Planung und Durchführung des Kurses wurde auf die Idee der Modellierung zurückgegriffen. Da das Programmieren von Algorithmen eine besondere Rolle spielte, wurde auf die Darstellungen von Fuchs (1988), Weigand und Weller (1997) sowie Siller (2009) im Zusammenhang mit der Modellierung besonders Bedacht genommen.

2. Methodische Überlegungen

Aus einer großen Zahl von Methoden haben wir für den Unterricht mit Technologie die nachfolgenden methodischen Konzepte in den Mittelpunkt gestellt. Ihnen wollen wir unser besonderes Augenmerk schenken. Dabei verfahren wir stets in gleicher Weise. Im ersten Teil charakterisieren wir jedes einzelne methodische Konzept. Dabei stellen wir jene Merkmale in den Vordergrund, die uns für unseren Unterricht mit Technologie bedeutsam erschienen. Im zweiten Teil beschreiben wir jeweils einen Unterrichtsabschnitt von EMMA, der nach dem zugrundliegenden methodischen Konzept gestaltet wurde.

Die genetische Methode

Folgende Merkmale eines nach dem genetischen Prinzip geführten Unterrichts erscheinen uns für EMMA wesentlich:

- Überlegungen werden in einen größeren ganzheitlichen Problemkontext (außer- und innerhalb der Mathematik) gesetzt.
- Unterricht mit Technologie ist als Prozess zu verstehen, d.h. schrittweise gelangen die Schüler(innen) von intuitiven und heuristischen Ansätzen beim Experimentieren zu „strengeren“ abstrakteren Beschreibungen.

Ausgehend vom und basierend auf dem im regulären Schulunterricht behandelten Gauß-Algorithmus wurden iterative Verfahren wie in Milicic (2016) ausgeführt zum Lösen von Linearen Gleichungssystemen vorgestellt und hergeleitet. In der folgenden prototypischen Aufgabenstellung wird der bekannte Gauß-Algorithmus von den Schüler(innen) experimentell mit den vorerst heuristisch hergeleiteten iterativen Verfahren verglichen um die Notwendigkeit von iterativen Lösern zu verdeutlichen:

- Gegeben sind Vektor $b \in \mathbb{R}^n$, $b_i = \frac{-2.0}{(n+1)}$ und Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$\begin{pmatrix} n+1 & -(n+1)/2 & 0 & \cdots & 0 \\ -(n+1)/2 & n+1 & -(n+1)/2 & \cdots & 0 \\ 0 & -(n+1)/2 & n+1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -(n+1)/2 & n+1 & -(n+1)/2 \\ 0 & \cdots & 0 & -(n+1)/2 & n+1 \end{pmatrix}$$

  Bestimme die Rechenzeit zur Lösung des Linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit einer hohen Toleranz (z.B. `TOL=1E-12`) für $n = 50, 100, 200, 400, 800, \ldots$ Gleichungen!
- Halte die Ergebnisse in einer Tabelle fest und stelle die Ergebnisse auch grafisch dar!

Entdeckendes Lernen

Folgende Merkmale aus diesem methodischen Zugang (Winter 2016) erscheinen für unseren Unterricht von besonderer Bedeutung:

- Gewinnen von individuellen Einsichten
- Intellektuelle bzw. emotionale Identifikation führt zu Neugier bei Schüler(inne)n
- *Entdecken lassen* tritt an die Stelle von *Belehren*

Das, auf dem Gauß-Seidel-Verfahren basierende, SOR-Verfahren konvergiert für den Verfahrensparameter $\omega \in (0,2)$, die optimale Wahl muss jedoch experimentell bestimmt werden. Die Schüler(innen) können eigenständig den besten Parameter für eine fixe Anzahl von Gleichungen bestimmen und untereinander vergleichen:

- Betrachtet wird das Linearen Gleichungssystem $Ax = b$ aus der vorherigen Aufgabe. Bestimme für eine feste Toleranz (z.B. `TOL=1E-9`) und eine feste Anzahl an Gleichungen (z.B. $n = 10$) den optimalen Wert (d.h. mit dem niedrigsten Residuum) für den Verfahrensparameter $\omega \in (0,2)$ und vergleiche den Wert mit deinem Nachbarn. Wer hat den besten Wert ermittelt?

Fächerübergreifende Betrachtungsweise

Aus dieser Methode gewinnen wir

- die Schaffung von Lebensbezug, d.h. die Schüler(innen) erhalten Hinweise auf die Bedeutung mathematischer Verfahren in zahlreichen Lebensbereichen.

Damit finden

- Heterogenität sowie
- unterschiedlichste Interessenslagen von Schüler(innen)
- Berücksichtigung.

Für reale Anwendungen ist eine schnelle und effiziente Lösung des Linearen Gleichungssystems essentiell. Gerade bei den im EMMA-Projekt untersuchten Variationsungleichungen ist die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wie vorher gegeben dünn besetzt, d.h. es gibt nur wenige von 0 verschiedene Einträge. Derartige Matrizen sollten im Sparse-Format gespeichert werden. Die Schüler(innen) können die Vorteile des Sparse-Formats anhand der folgenden Aufgabenstellung erfahren.

- Eine Zahl im `double`-Format abgespeichert beansprucht 64 Bits. Wie viel Speicherplatz benötigt die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dann im Sparse-Format und als voll abgespeicherte Matrix?
- Vergleiche die Rechenzeit zum Lösen Systems $Ax = b$ für eine feste Toleranz (z.B. `TOL=1E-9`) in Abhängigkeit von der Anzahl der Gleichungen für das Jacobi-Verfahren mit einer vollbesetzten Matrix und einer im Sparse-Format abgespeicherten Matrix!

Zielgerichtetes Handeln

An Merkmalen für unseren Unterricht mit Technologie sind bei der Handlungsorientierung zu nennen:

- ein ausgewogenes Verhältnis von Kopf- und Handarbeit bei den Schüler(inne)n, welches zu einer Stabilisierung von (vor allem informatischen) Konzepten (Speicherbedarf, Effizienz, Laufzeit) führt.
- Die Hinzunahme einer zweckorientierten Sichtweise, etwa durch die Hinzunahme weiterer „Stützpunkte" bei der Brückenaufgabe, im Sinne der *Operativen Begriffsbildung* (Bender & Schreiber 1985).

Der Lösungsvektor Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ des Linearen Gleichungssystems $Ax = b$ beschreibt die Auslenkung der Brücke. Die folgende Aufgabenstellung verdeutlicht diesen Zusammenhang:

- Löse das Lineare Gleichungssystem $\mathrm{Ax} = \mathrm{b}$ für $\mathrm{n} = 7$ mit dem Jacobi-Verfahren und notiere dir den Lösungsvektor nach jeweils $1,2, \dots, 7$ Iterationen und stelle die Lösungsvektoren grafisch dar.

3. Zusammenfassung und Resümee

Zusammenfassend ist zu sagen, dass uns der Mix an Methoden bei einem sinnstiftenden Unterricht mit Technologie überrascht hat. Die Konzepte des Modellierens und Programmierens haben sich als bedeutsam sowie tragfähig für einen experimentellen Unterricht mit Technologie erwiesen. Man beachte allerdings, dass vorgegebene „Programmgerüste" von Schüler(inne)n zumeist als restriktiv empfunden wurden, d.h. man wollte die Programme von „Grund auf" selbst designen. Die besondere Rolle digitaler Technologie beim Lösen lebensnaher Aufgaben ist/war unbestritten.

Literatur

Bender, P. & Schreiber, A. (1985). *Operative Genese der Geometrie-Schriftenreihe Didaktik der Mathematik*-Band 12, Verlage HPT: Wien & B.G. Teubner: Stuttgart.

Fuchs, K. (1988). Erfahrungen und Gedanken zu Computern im Unterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik* 9 (2/3), S. 247-256

Milicic, G. (2016). Iterative Löser für lineare Gleichungssysteme. In: *Mathematik im Unterricht* (7), S. 13-20.

Siller, H-S. (2009). Der Begriff „Modellbilden" in der Mathematik- bzw. Informatikdidaktik. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009* (Neubrand, M. Hrsg.), WTM-Verlag: Münster, S. 431-434

Weigand, H-G. & Weller, H. (1997). Das Lösen realitätsorientierter Aufgaben zu periodischen Vorgängen mit Computeralgebra. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* Vol. 29, issue 5, S. 162-169

Winter, H. (2016). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht*. Springer Spektrum: Wiesbaden.

Internetquellen

EMMA – https://www.uni-salzburg.at/index.php?id=67559&L=0 (Aufruf: 27.3.2018)