Ulrich KORTENKAMP & Johanna GORAL, Potsdam

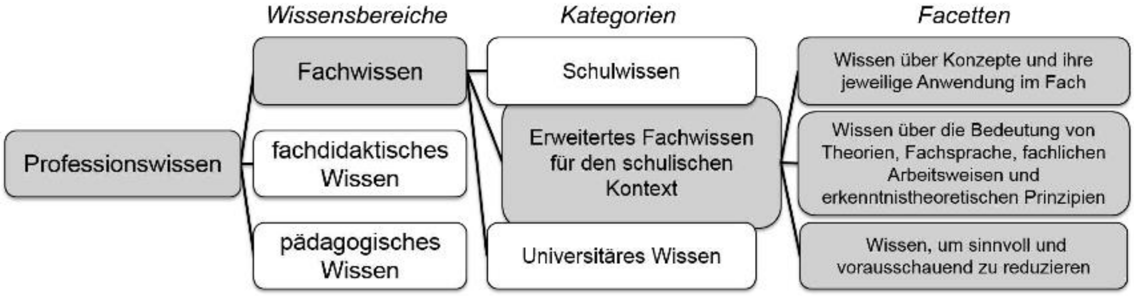
# Aussichtstürme schaffen – den Horizont erweitern, ohne dorthin zu laufen

Auch in den Lehramtsstudiengängen für die Primarstufe müssen die fachwissenschaftlichen Inhalte mathematisch korrekt und intellektuell ehrlich aufbereitet werden. Dabei gilt es Lernumgebungen für die Studierenden zu schaffen, die ihnen einerseits ermöglichen eigene schulische Vorerfahrungen zu nutzen und andererseits die Strukturen der universitären Mathematik kennenzulernen. Die zukünftigen Lehrerinnen und Lehrer sollen dazu befähigt werden die Schulmathematik von einem höheren Standpunkt beurteilen zu können (Klein, 1908). Gleichzeitig sollte dabei vermieden werden, die Mathematik mit all ihren Details als abgeschlossene, rein axiomatisch aufgebaute Disziplin zu präsentieren.

Der fachwissenschaftliche Anteil eines Lehramtsstudiums in Potsdam ist allerdings auf 27 Leistungspunkte im Studiengang mit dem Schwerpunkt Primarstufe, bzw. 18 Leistungspunkte im Studiengang mit dem Schwerpunkt Inklusion beschränkt. Diese beschränkten zeitlichen Ressourcen erlauben es nicht, fachwissenschaftlichen Grundlagenvorlesungen wie im Bachelor oder Master of Science in das Studium zu integrieren. Dennoch soll zukünftigen Lehrerinnen und Lehrern ein Einblick in die Mathematik als *Fachwissenschaft* ermöglicht werden, ohne das *Schulfach* Mathematik zu vernachlässigen. Wie jedoch die Ausgestaltung dieser Grundlagenveranstaltungen konkret aussieht, welche Kriterien und Ideen einer Vorlesung zugrunde liegen, bleibt bislang häufig implizit.

## Lehramtsstudierende brauchen ein erweitertes Fachwissen für den schulischen Kontext

Ausgehend vom *Modell professioneller Handlungskompetenz* im Bereich des Professionswissens (Baumert & Kunter, 2006) und unter Berücksichtigung der empirisch trennbaren Kategorie des *Fachwissens im schulischen Kontext* (Loch, 2015) oder des *vertieften Schulwissens,* wie das lehramtsspezifische Fachwissen u. a. in der Fachdidaktik Physik benannt ist (Riese et al., 2015), wurde in Zusammenarbeit mehrerer Fachdidaktiken der Universität Potsdam das fachübergreifende Modell des *erweiterten Fachwissens für den schulischen Kontext* konzeptualisiert (Woehlecke et al., im Druck).




*Einbettung des erweiterten Fachwissens für den schulischen Kontext in das Modell des Professionswissens, angelehnt an Baumert & Kunter (2006) und Riese et al. (2015).*

Das Modell versucht, bisherige Studienergebnisse und Beiträge zum Fachwissen (angehender) Lehrerinnen und Lehrer so zu vereinen, dass es als Orientierungsrahmen für die Gestaltung lehramtsrelevanter Fachwissensveranstaltungen dienen kann. Dabei bleibt die Fachwissenschaft immer strukturgebender Bezugspunkt.

## Der fachwissenschaftliche Anspruch bleibt erhalten

Die Vorlesung „Kapitel der Elementarmathematik“ an der Universität Potsdam ist entlang tragfähiger fundamentaler Ideen der Mathematik ausgerichtet und versucht so Phänomene universitärer Mathematik im Schulwissen der Sekundarstufe oder auch der Primarstufe explizit aufzuzeigen.

Die Vorlesung ist im Masterstudium verortet und schließt den fachwissenschaftlichen Teil des Lehramtsstudiums an der Universität ab. Studierende haben also bereits Einblick in verschiedene Disziplinen der Mathematik wie Arithmetik, Geometrie und Stochastik gewonnen. Dieses Vorwissen wird während der Vorlesung genutzt und miteinander verknüpft.

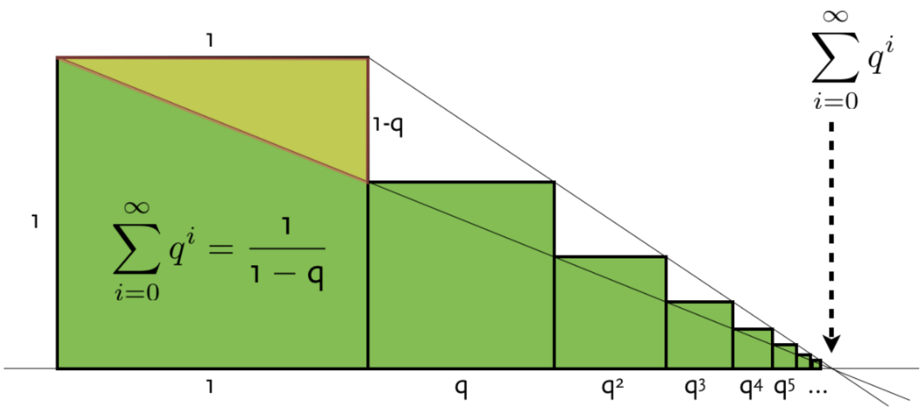
Ausgangspunkt für die Gestaltung der Vorlesung waren Fragen, die so auch Schülerinnen und Schüler verschiedenen Alters stellen könnten: Welches ist die größte Zahl? Kann man das Muster eines Blumenkohls berechnen? Warum ist $0,\overline{9} = 1$? Wann passen Legosteine auch schräg zusammen? Etc.

Die Beantwortung der Fragen erfolgte dem Lernstand der Studierenden angemessen und mit ihnen gemeinsam. Mathematische Konzepte und Arbeitsweisen wurden zunächst beschrieben und auf einer phänomenalen Ebene genutzt, auch mit dem Einsatz zunächst unpräziser Sprache und Darstellungen. Die Antworten wurden gefunden, indem das jeweilige mathematische Fachgebiet dekomprimiert wurde, sodass relevante Bezüge zur Ausgangsfrage hergestellt werden konnten. So kann zum Beispiel $0,\overline{9}$ nicht nur als periodischer Bruch, sondern auch als eine geometrische Reihe aufgefasst werden mit $0,\overline{9} = 9 \cdot \sum_{i=1}^{\infty}(\frac{1}{10})^{i}$ . Geometrische Reihen sind in ihrer abstrakten Form kein Lernstoff der Grundschule. Und dennoch eignen sie sich hervorragend, um an konkretem Material und elementaren Fragestellungen einen Einblick in die universitäre Mathematik zu geben.

## Aussichtstürme verschaffen Einblick und Überblick

Die Diskussion um das Professionswissen von Lehrerinnen und Lehrern wird unter verschiedenen Gesichtspunkten geführt. In den Lehramtsstudiengängen mit den Schwerpunkten Primarstufe und Inklusion an der Universität Potsdam wurde neben einer theoretischen Konzeptualisierung des Fachwissens unter einer universitären Perspektive pädagogischer Entwicklungsforschung auch die Vorlesung abschlussbezogen gestaltet.

Das Potsdamer Modell zum erweiterten Fachwissen für den schulischen Kontext bildet dafür einen Orientierungsrahmen. Das *Wissen, um sinnvoll und vorausschauend zu reduzieren* wird dahingehend aufgebaut, als dass die initialen Fragen fachwissenschaftlich fundiert bearbeitet werden, um anschließend dem Lernstand der Schülerinnen und Schülern angemessen beantwortet zu werden. Ausgehend von der Frage ob $0,\overline{9} = 1$ ist (oder nicht) werden in der Vorlesung geometrische Reihen mithilfe ähnlicher Quadrate dargestellt, basierend auf der grandiosen Visualisierung in Nelsen (1993), hier in eigener Darstellung.




Über konkretes Material – Moosgummi- bzw. Plexiglasquadrate, die exakt für die Verwendung in einer solchen geometrischen Reihe bemessen sind – können die Studierenden in der Veranstaltung die geometrischen Beziehungen entdecken. Die Veranschaulichung stützt sich auf bereits Bekanntes aus verschiedenen mathematischen Gebieten, wie z.B. Stufenzahlen und Strahlensätze, und eröffnet den Zugang zu anderen Stoffgebieten, z.B. Taylorreihen oder Trigonometrie. Dieses verknüpfte Wissen bildet somit die Grundlage für das zukünftige Handlungswissen der Lehrerinnen und Lehrer.

Das *Wissen über die Bedeutung von Theorien, Fachsprache, fachlichen Arbeitsweisen und erkenntnistheoretischen Prinzipien* wird mit der expliziten Beschreibung und Nutzung mathematischer Arbeitsweisen und Strukturen aufgebaut. Im Beispiel wird die geometrische Reihe als Werkzeug zur Approximation numerischer Prozesse genutzt. Gleichzeitig wird darauf hingewiesen, warum und wie in der Vorlesung angesprochene Erklärungen aus Sicht der Fachwissenschaft teilweise unvollständig und entsprechend unpräzise dargestellt werden. Die Studierenden lernen so die Ansprüche der mathematischen Arbeitsweisen kennen und werden damit einhergehend dafür sensibilisiert. Das *Wissen über Konzepte und ihrer Anwendung im Fach* wird entlang fundamentaler Ideen (vgl. z. B. Schwill, 1994) der Mathematik aufgebaut. Das Beispiel verdeutlicht besonders, dass Konzepte über verschiedene Niveaustufen erhalten bleiben und in mehr als einem Stoffgebiet sichtbar werden, also sowohl vertikal als auch horizontal wiederzuerkennen sind.

Entgegengesetzt zu Kleins Herangehensweise entspricht die Gestaltung der Vorlesung also eher der Betrachtung höherer Mathematik von einem elementaren Standpunkt - natürlich auf Kosten der Vollständigkeit, aber mit großen Gewinnen für das Verständnis der eigentlichen mathematischen Idee. Diese Standpunkte werden zu Aussichtstürmen ausgebaut und verschaffen den Studierenden einen Überblick über die Fachwissenschaft der Mathematik, sodass es den Studierenden anschließend umso leichter fallen müsste sich in der Fachwissenschaft zu orientieren, selbst wenn sie selbst nie den Horizont erreichen (müssen).

## Literatur


Baumert, J. & Kunter, M. (2006). Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 9 (4), 469–520.

Klein, F. (1908). Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus: Teil I: Arithmetik, Algebra, Analysis. Vorlesung gehalten im Wintersemester 1907-08. Leipzig: Teubner.

Loch, C. (2015). *Komponenten des mathematischen Fachwissens von Lehramtsstudierenden*. München: Dr. Hut.

Nelsen, R. (1993). *Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking.* Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Riese, J., Kulgemeyer, C., Zander, S., Borowski, A., Fischer, H. E., Gramzow, Y. et al. (2015). Modellierung und Messung des Professionswissens in der Lehramtsausbildung Physik. *Zeitschrift für Pädagogik*, Beiheft 61, 55–79.

Schwill, A. (1995). Fundamentale Ideen in Mathematik und Informatik. In Hischer, H. & Weiß, M. (Eds.). *Fundamentale Ideen — Erörterungen zur Zielorientierung eines künftigen Mathematikunterrichts unter Berücksichtigung der Informatik*. Hildesheim: Franzbecker, 18-25.

Woehlecke, S., Massolt, J., Goral, J., Hassan-Yavuz, S., Seider, J., Borowski, A., Fenn, M., Kortenkamp, U. & Glowinski, I. (im Druck). Das erweiterte Fachwissen für den schulischen Kontext als fachübergreifendes Konstrukt und die Anwendung im universitären Lehramtsstudium. *Beiträge zur Lehrerinnen- und Lehrerbildung*, 35 (2).