

Flexibles Stellenwertverständnis und anschlussfähige Grundvorstellungen

Es ist nicht verboten, an einer Stelle in der Stellenwerttafel mehr als 9 Zählmarken zu haben. Im Gegenteil: Für das Verständnis von Bündelungs- und Entbündelungsprozessen, wie sie zum Beispiel bei schriftlichen und halb-schriftlichen Rechenverfahren benötigt werden, sind dezimale nicht-Standard-Zerlegungen von Zahlen notwendig. Aber nicht nur dort, sondern auch für den Aufbau von tragfähigen und anschlussfähigen Grundvorstellungen ist eine flexible Auffassung von Stellenwert-Darstellungen unerlässlich. Wir beleuchten dieses Thema auch im Hinblick auf die zunehmend geforderte „Digitalisierung“.

Stellenwertverständnis

Unser dezimales Zahlssystem basiert auf 5 Kennzeichen: Dem Prinzip der fortgesetzten Bündelung, dem Dezimalsystem, dem Prinzip des Stellenwerts sowie dem multiplikativen und additiven Prinzip (Ross, 1989; Ladel & Kortenkamp, 2014). Das *Prinzip der fortgesetzten Bündelung* ist zunächst unabhängig vom Prinzip des Stellenwerts zu sehen, stellt jedoch eine Voraussetzung dar. Denn nur wenn fortgesetzt gebündelt ist, lässt sich der Wert der Zahl auch exakt zuordnen. Das *Dezimalsystem* stellt eine Konvention dar, ist also einstmals von Menschen festgelegt worden. Theoretisch sind jedoch auch andere Systeme möglich und in Verwendung, wie man zum Beispiel an der Größe Zeit sieht. Das *Prinzip des Stellenwerts* besagt, dass die Stelle, an der eine Ziffer steht, Informationen über ihren Wert gibt (Einer, Zehner, Hunderter, etc.). Um den Wert einer Ziffer (Ziffernwert) zu erhalten, muss die Ziffer mit dem entsprechenden Stellenwert multipliziert werden (*multiplikatives Prinzip*). Den Wert der Zahl (Zahlenwert) erhält man, wenn man alle Ziffernwert addiert (*additives Prinzip*). Das Prinzip des Stellenwerts ist nicht auf eine bestimmte Anzahl an Stellen reduziert – Schülerinnen und Schüler können demnach kein Stellenwertverständnis für maximal dreistellige Zahlen haben. Das Prinzip des Stellenwerts gilt für alle und damit auch für größere oder kleinere Zahlen. Dies folgt aus der konsequenten Anwendung aller Prinzipien. Davon unabhängig werden selbstverständlich erste Zugänge zum Stellenwertverständnis mit zweistelligen Zahlen geschaffen. Das Prinzip der *fortgesetzten Bündelung* impliziert aber, dass nicht nur in Zehnern gebündelt wird, sondern zehn Zehner wiederum zu einem Hunderter gebündelt werden, und zehn Hunderter wiederum zu einem Tausender, etc., bis von einer Bündeleneinheit nicht mehr genügend Bündel (<10) vorhanden sind.

Das Verständnis von Stellenwert wird ganz unterschiedlich definiert, beispielsweise als die Fähigkeit zum Wechseln zwischen Darstellungsebenen von Zahlen (Van den Walle 1994, Schulz 2014). Aufgrund der oben dargestellten Prinzipien unseres Zahlensystems definieren wir das Verständnis von Stellenwert als die Fähigkeit, die grundlegenden Prinzipien unseres dezimalen Zahlensystems anwenden zu können. Hierzu gehört neben dem Wissen um die Zusammensetzung von Zahlen aus ihren Ziffern auch die Fähigkeit, die Auswirkung der Verschiebung einer Ziffer um eine Stelle zu beschreiben und vorherzusagen (Wertänderung).

Flexibles Stellenwertverständnis

Für weiterführendes Lernen von Mathematik und anschlussfähige Grundvorstellungen ist es wichtig, dass das Prinzip des Stellenwerts erweitert wird und Beziehungen zum Prinzip des Bündelns hergestellt werden (vgl. Gerster & Schulz 2007). „Die 4 in 45 muss ebenso als vier Zehner wie als vierzig Einer gedacht werden können“ (Gaidoschik 2014, S. 296). Neben der Standarddarstellung einer Zahl (je Stelle genau eine Ziffer) kann eine Stellenwerttafel demnach auch andere Teilungen der Zahl in die einzelnen Stellenwerte enthalten. Dies ist dann der Fall, wenn keine vollständige Bündelung vorliegt. Ein *flexibles* Stellenwertverständnis lockert das Prinzip der fortgesetzten Bündelung zugunsten einer Verknüpfung des Prinzips der Bündelung mit dem Stellenwertprinzip auf. Dabei ergeben sich neben der Standard-Darstellung (Standardteilung) einer Anzahl zwei weitere prinzipielle Aufteilungsmöglichkeiten: *Strenge* Nicht-Standard-Teilungen ergeben sich aus der Interpretation der Anzahl eines Stellenwertes als niedrigerer Stellenwert: So können 4 Zehner als 40 Einer, 3 Hunderter als 30 Zehner oder 300 Einer, oder die Zahl 16832 als 16 Tausender, 8 Hunderter und 32 Einer interpretiert werden. Die Aufteilung verwendet also die gleichen Ziffern wie die Zahl in ihrer Standarddarstellung. *Nicht-strenge* Nicht-Standard-Teilungen erlauben auch das Aufteilen der Anzahlen von Stellenwerten auf mehrere verschiedene Stellenwerte. So kann 16832 als 14 Tausender, 26 Hunderter, 23 Zehner und 2 Einer interpretiert werden (Ladel & Kortenkamp 2014).

Sowohl die strenge als auch die nicht-strenge Nicht-Standard-Teilungen werden über mathematische Inhalte und den Unterrichtseinsatz gerechtfertigt. So wie die Standard-Teilung die Zahldarstellung ohne Stellenwerttafel begründet, so werden strenge Nicht-Standard-Teilungen u.a. sprachlich („vierzehnhundertzwölf“) und bei der halbschriftlichen Division ($16832 : 4 = 16T\ 8H\ 32E : 4 = 4T\ 2H\ 8E = 4208$) eingesetzt. Nicht-strenge Nicht-Standard-Teilungen treten hingegen besonders bei den schriftlichen Rechenverfahren auf, zum Beispiel beim Übertrag in der Addition und beim Entbündeln in der Subtraktion. Auch als Zwischenergebnis, zum Beispiel bei der

Hinführung zur Multiplikation über das Neper-Verfahren, tauchen nicht-strenge Teilungen auf.

Ein wesentlicher Punkt bei der Flexibilisierung des Stellenwertverständnisses ist, dass verschiedene Darstellungen einer Zahl jeweils verschiedene Operationen mit dieser Zahl besser unterstützen. Daher ist ein Ziel, dass Schülerinnen und Schüler zwischen verschiedenen *gleichwertigen* Darstellungen einer Zahl in der Stellenwerttafel wechseln können, auch ohne explizit auf das Material zurückzugreifen. Hier sei erneut der Umgang mit Überträgen in den schriftlichen Rechenverfahren genannt.

Anschlussfähige Grundvorstellungen

Die Idee der Grundvorstellung beschreibt „Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und dem Phänomen der individuellen Begriffsbildung“ (vom Hofe 1995, S. 97). Dabei stehen die Aspekte der Sinnkonstituierung eines Begriffs, der Aufbau entsprechender Repräsentationen sowie die Fähigkeit zur Anwendung eines Begriffs im Fokus. Ziel ist es nun nicht nur Grundvorstellungen zum Begriff des Stellenwerts bei den Schülerinnen und Schülern aufzubauen, sondern Ziel ist es *anschlussfähige* Grundvorstellungen aufzubauen, so dass im Verlauf des Lernens verschiedener mathematischer Inhalte von der Primarstufe bis zur Hochschule kein Bruch in der Curriculumspirale entsteht, sondern auf bestehende Grundvorstellungen aufgebaut werden kann.

Am Beispiel der Multiplikation und Division mit Zehnerzahlen wird im Folgenden aufgezeigt, mit welchen Schwierigkeiten Schülerinnen und Schüler in der Schullaufbahn zu kämpfen haben. Es werden ganz unterschiedliche und nicht anschlussfähige Grundvorstellungen vermittelt. In Büchern der Primarstufe finden sich folgende Erklärungen:

Trick: „Mit dem Einmaleins fang‘ an, dann häng‘ alle Nullen an“

Bündeln/Entbündeln: „10 Hunderter sind 1 Tausender; $10 \cdot 100 = 1000$ “

Vertauschen von Stellenwerten/Bündelungseinheiten: „Beim Multiplizieren mit 10 werden aus Einern Zehner und aus Zehnern Hunderter.“ „Beim Dividieren mit 10 werden aus Hundertern Zehnern und aus Zehnern Einer.“

Stellen verschieben: „Beim Malnehmen mit 10 rücken alle Ziffern eine Stelle nach links. Beim Teilen durch 10 rücken alle Ziffern eine Stelle nach rechts.“

Während bei dieser letzten Erklärung Stellen verschoben werden, wird ab der Sekundarstufe häufig das Komma verschoben – und zwar genau in entgegengesetzter Richtung:

Komma verschieben: „Um eine Dezimalzahl mit einer Zehnerpotenz (10, 100, 1000, ...) zu multiplizieren, musst du das Komma um die Anzahl der Nullen dieser Zehnerpotenz nach rechts verschieben. Die Ziffernfolge bleibt unverändert. Um eine

Dezimalzahl durch eine Zehnerpotenz (10, 100, 1000, ...) zu dividieren, musst du das Komma um die Anzahl der Nullen dieser Zehnerpotenz nach links verschieben. Die Ziffernfolge bleibt unverändert.“

So werden in verschiedenen Schulstufen und Schulbüchern jeweils immer wieder andere „Tricks“ oder „Erklärungen“ zur Multiplikation und Division mit Zehnerzahlen gegeben, anstatt an Handlungen anzuknüpfen, die den Aufbau von anschlussfähigen Grundvorstellungen fördern. Doch wichtig ist, dass „die Schülerinnen und Schüler das Prinzip der dezimalen Unterteilung als konstituierendes Grundprinzip erkennen und anschauliche Vorstellungen mit den Stellenwerten verbinden, anstatt sie rein formal als Begriff auswendig zu lernen“ (Heckmann 2006, S. 48).

Als Fazit dieser Überlegungen plädieren wir an dieser Stelle für die Nutzung eines flexiblen Stellenwertverständnisses, bei dem das *wertgleiche* Verschieben von Zählmarken in einer Stellenwerttafel mit *automatischem* Bündeln und Entbündeln (Ladel & Kortenkamp, 2014) dafür genutzt wird, unabhängig von einer konkreten Basis, also auch unabhängig vom *Dezimalsystem* verschiedene Darstellungen einer Zahl zu erzeugen, die dann für weitere Tätigkeiten genutzt werden können. Dies geht bis hin zu Zahldarstellungen mit *unbekannter* Basis – Polynomen – oder gar *unendlichen* Zahldarstellungen, im Bereich der irrationalen reellen Zahlen. So ist das konkrete Bündeln, also das Abzählen einer festen Anzahl von Objekten, die dann als neues Bündlungs-Objekt aufgefasst werden, zwar eine Grundlage der Zahldarstellung, es muss aber verinnerlicht und abstrahiert werden, sodass das Abzählen später auch nur noch als Möglichkeit statt als Notwendigkeit angesehen wird.

Literatur

- Gaidoschik, M. (2014): „Hälfte von 90? Geht doch gar nicht!“ – Zu Defiziten im Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht (S. 395-398). Münster: WTM-Verlag
- Heckmann, K. (2006): Zum Dezimalbruchverständnis von Schülerinnen und Schülern. Theoretische Analyse und empirische Befunde. Dissertation. Berlin: Logos Verlag
- Ladel, S. & Kortenkamp, U. (2014): Handlungsorientiert zu einem flexiblen Verständnis von Stellenwerten – ein Ansatz aus Sicht der Artifact-Centric Activity Theory. In: Ladel, S. & Schreiber, Chr. (Hrsg.) *Von Audiopodcast bis Zahlensinn*, 151-176. Münster: WTM-Verlag.
- Ross, S. H. (1989): Parts, Wholes, and Place Value: A Developmental View. In: *The Arithmetic Teacher*, 36 (6), 47-51.
- Schulz, A. (2014): *Fachdidaktisches Wissen von Grundschullehrkräften*. Wiesbaden: Springer.
- Van de Walle, J. A. (1994): *Elementary school mathematics. Teaching developmentally* (2. Ed.). White Plains, N.Y.: Longman.
- Vom Hofe, R. (1995). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Heidelberg: Spektrum.