

Eine Stickmaschine im Mathematikunterricht?! Von historischen Erfindungen zu Entdeckungen im Mathematikunterricht

Im Mittelpunkt steht eine Stickmaschine. Es handelt sich um eine Maschine, in der Mathematik verborgen ist. Im Rahmen einer Unterrichtseinheit soll diese sichtbar werden. Den Unterrichtseinstieg bildet ein Videoclip, bei dem man die Arbeitsweise einer Stickmaschine erkennen kann. Dann wird die historische Handstickmaschine von Josua Heilmann (1796-1848) genauer untersucht. Es zeigen sich an diesem Beispiel, wie sich Fragen und Problemstellungen für einen aktuellen Mathematikunterricht ergeben können. Es stellen sich insbesondere folgende Fragen: Wie kann die dem Gerät zugrundeliegende Mathematik entdeckt werden? Ist es möglich, forschendes Lernen bei der Beschäftigung mit einer solchen Maschine zu verwirklichen?

Der Begriff des Ideenkonglomerats

Der Begriff (vgl. van Randenborgh, 2014) bedeutet mit Bezug auf eine historische Handstickmaschine, dass dieses Gerät verschiedene Arten von Ideen enthält. Diese sind ganz unterschiedlicher Art. So gibt es etwa *physikalische, technische oder mechanische, mathematische und ökonomische Ideen*. Bei einem Unterrichtseinsatz wird die mathematische Idee eines Geräts im Zentrum des Interesses stehen. Andere Ideen, wie die physikalischen oder ökonomischen, treten in den Hintergrund. Ein besonderer Bestandteil der Handstickmaschine ist der *Pantograph*, ein Instrument zum Vergrößern oder Verkleinern (s. van Randenborgh, 2015a). Er erfüllt eine entscheidende Funktion für die Strickmaschine und ist auf eine bestimmte Art und Weise gebaut worden. Für die Bauweise ist die *mechanische Idee* verantwortlich. In der Funktionsweise des Pantographen begegnen wir der *mathematischen Idee*. Außerdem stellt sich die Frage, wozu das Gerät benutzt wird. Damit ist nach seiner *Einsatzidee* gefragt. Diese drei wichtigen Ideen lassen sich unter dem Begriff *gegenständliche Ideen* des Ideenkonglomerats zusammenfassen (s. van Randenborgh, 2018). Wird eine solche Maschine im Mathematikunterricht untersucht, dann geschieht das mit einem bestimmten Ziel. Damit kommt der Maschine auch eine *didaktische Idee* zu. Die Schülerinnen und Schüler erforschen das Gerät und entwickeln so eigene *Nutzungs- und Erklärungs-ideen*. Eine Handstickmaschine ist zu einer bestimmten Zeit und in einer bestimmten Situation entstanden. Daher hat sie auch eine *kulturell-historische Idee*. In dieser sind auch ursprüngliche Nutzungs- und Erklärungs-ideen wiederzufinden. Zusammenfassend können diese Ideen als *personale Ideen* des Ideenkonglomerats bezeichnet werden.

Reduktion und Fokussierung

Mit Blick auf den Mathematikunterricht ist hervorzuheben, dass nicht jeder Bestandteil der historischen Handstickmaschine mathematisch interessant ist. Dieses zu erkennen, ist auch ein wichtiger Schritt im Lernprozess der Schülerinnen und Schüler. Es ist also hervorzuheben, dass zunächst eine Reduktion auf ein mathematisch wichtiges Bauteil stattfindet. Es handelt sich hierbei um den Pantographen. Parallel dazu geschieht auch ein Filtern der Ideen. So spielen beispielsweise die physikalische oder ökonomische Idee für die Beschäftigung der Lernenden im Mathematikunterricht keine entscheidende Rolle mehr bzw. sie werden nicht weiter vertieft. In den Hintergrund tritt auch die kulturell-historische Idee. Die für den Lehrenden zentrale didaktische Idee spielt für die unterrichtliche Beschäftigung der Lernenden mit dem Gerät eine verborgene und nicht wahrgenommene Rolle. Es erfolgt vielmehr eine Konzentration auf die Erforschung der mechanischen und mathematischen Idee und ihres Zusammenhangs. Ist dieses Zusammenspiel beim Pantographen aufgedeckt, kann auch die Einsatzidee des Pantographen als Bauteil der Handstickmaschine erklärt werden. Dadurch gelingt eine Fokussierung auf die der Maschine zugrundeliegende Mathematik. Ein wesentliches Unterrichtsziel ist es, diese implizite Mathematik zu erkennen und explizit zu machen. Der Weg von der Betrachtung einer historischen Stickmaschine hin zum Entdecken der verborgenen Mathematik kann somit gut mit Hilfe des Begriffes des Ideenkonglomerats beschrieben werden. Es ist hervorzuheben, dass dieser auch dazu beiträgt, die Maschine als eine Konstruktion ganz unterschiedlicher Ideen wahrzunehmen. Wird sie als ein *Gebilde miteinander verwobener Ideen* aufgefasst (vgl. van Randenborgh, 2018), können für den Mathematikunterricht wichtige Ideen aufgedeckt werden. So findet eine Reduktion auf einen zentralen Bestandteil der Maschine statt. Dieses ist der Pantograph. Mit seiner Hilfe wird ein verkleinertes Stickmuster von einer Vorlage übertragen. Auf diese Weise stehen bei der Analyse der Handstickmaschine im Wesentlichen die mechanische und vor allem die mathematische Idee des Pantographen im Vordergrund.

Der Pantograph als besonderes Bauteil einer Handstickmaschine

Um die Arbeitsweise des Pantographen einer historischen Handstickmaschine zu erforschen, kann im Unterricht das entsprechende Zeichengerät untersucht werden. Hier gibt es vor allem die Möglichkeit, Schülerinnen und Schüler mit einem realen oder digitalen Modell arbeiten zu lassen. Zur mathematischen Idee und dem Erforschen des Pantographen im Mathematikunterricht siehe van Randenborgh (2015a) und zu den Ergebnissen einer empirischen Studie dazu siehe van Randenborgh (2015b). Beim Erforschen dieses Zeichengerätes können Schülerinnen und Schüler entdecken, dass man mit

Hilfe des Pantographens Zeichnungen, Bilder oder Abbildungen kopieren, vergrößern oder verkleinern kann. Durch eine genauere Beschäftigung mit der mathematischen Idee gelangen sie zu den Themen Strahlensätze, Ähnlichkeit bzw. zentrische Streckung. Da es sich dabei um die dem Gerät zugrundeliegende, verborgene Mathematik handelt, kann diese in einem Prozess des forschenden Lernens entdeckt werden.

Ein Modell des forschenden Lernens beim Einsatz einer historischen Handstickmaschine

In neueren Veröffentlichungen findet man beispielsweise das Modell von Ludwig, Lutz-Westphal und Ulm (2017). Hier wird dem Einstieg eine Startfunktion zugeschrieben. Dieser ist beim hier beschriebenen Einsatz der Handstickmaschine durch einen Videoclip bzw. eine Abbildung gegeben. Ludwig, Lutz-Westphal und Ulm beschreiben dann, dass Lernende, indem sie beobachten und/oder handeln, zu Fragen und Ideen kommen. Diese werden erkundet und führen zu bestimmten Ergebnissen („Erkundungsergebnissen“ Ludwig et al., 2017, S.3), die in einem nächsten Schritt strukturiert werden und so zu neuen Erkenntnissen führen. Der Schritt des Strukturierens beinhaltet auch eine Einordnung und Vernetzung der von den Lernenden subjektiv neu entdeckten Zusammenhänge („Erkundungsergebnisse“) mit dem Vorwissen. Die dann erarbeiteten Darstellungen der Einzelergebnisse können in einer Präsentationsphase im Plenum vorgestellt werden. Die anschließende Diskussion der möglicherweise verschiedenen Resultate können nun zu einem gemeinsamen Ergebnis zusammengeführt werden. Auf diese Weise sind die Lernenden zu einer (neuen) Wissensbasis gelangt, der Prozess kann abgeschlossen werden oder es haben sich neue Phänomene oder Fragen ergeben, die wiederum, wie eben beschrieben, untersucht werden können. Sieht man einmal von den Unterrichtsphasen ab, die das beschriebene Prozessmodell auch enthält, ergeben sich im Wesentlichen die folgenden Schritte bzw. Schüleraktivitäten. Dabei ist die Ausgangssituation (Einstieg) das Medium, das das zu untersuchende Phänomen enthält. In diesem sollen die Schülerinnen und Schüler das Mathematikhaltige an dem Phänomen wahrnehmen und so einen Übergang von der Situation in der realen Welt hin zu einem Modell in der mathematischen Welt vornehmen (1: „modellieren“). Im nächsten Schritt wird das Phänomen analysiert (2: „deduzieren“). Es wird innerhalb des mathematischen Modells gearbeitet. Dabei werden die gefundenen Zusammenhänge mit Hilfe des Vorwissens der Lernenden mathematisch erklärt und gedeutet (3: „interpretieren“). Die Erklärungen werden nun von ihnen mit dem Ausgangsphänomen verglichen und bewertet (4: „validieren“). Diese Reflexion der Ergebnisse hinsichtlich ihrer Bedeutung für das Verständnis der Ausgangssituation zeigt dann auf, ob alles

berücksichtigt wurde, ob die Ergebnisse tragfähig sind und ob es neue Fragen oder Probleme gibt. Diese würden dann in einem neuen Durchlauf entsprechend untersucht werden. Durch diese vier Schritte und den Schülertätigkeitsbeschreibungen in den Klammern (nach Schupp, 1988) erkennt man bereits die Nähe zum Modellieren (genauer dargestellt in van Randenborgh, 2015b).

Fazit

Abschließend soll noch einmal der Frage nachgegangen werden, inwiefern der Begriff des Ideenkonglomerats in diesem Kontext weiterführend ist. Beim ersten Schritt müssen einige Ideen in den Hintergrund treten, damit die drei gegenständlichen Ideen des Pantographen näher untersucht werden können. Es wird zunächst die mechanische Idee (Bauweise) des Pantographen aufgedeckt. Nun wird beispielsweise das Gelenkparallelogramm wahrgenommen. Es entstehen hier bei den Lernenden erste Nutzungs- und Erklärungsideen. Beim zweiten Schritt kommt eine genauere Beschäftigung mit der Funktionsweise hinzu. Diese führt zur mathematischen Idee. Wird sie ergründet und wird ein Zusammenhang zwischen diesen beiden Ideen hergestellt, kann die zugrundeliegende Mathematik aufgedeckt werden. Auch hier werden Nutzungs- und Erklärungsideen gebildet, die dann im dritten Schritt im Hinblick auf das Vorwissen mathematisch erklärt werden. Beispielsweise kann eine zentrische Streckung erkannt werden. Der vierte Schritt nutzt die gefundene Mathematik, um das Ausgangsphänomen, die Handstickmaschine zu erklären. Auch hier entstehen Nutzungs- und Erklärungsideen. Dabei kann das Validieren an dieser Stelle dazu führen, dass erkannt wird, dass die erzeugte Abbildung bezogen auf das Ausgangsbild „auf dem Kopf steht“. Dieses führt wiederum zu einer zentrischen Streckung mit negativem Streckfaktor.

Literatur

- Ludwig, M., Lutz-Westphal, B. & Ulm, V. (2017). Forschendes Lernen im Mathematikunterricht. *Praxis der Mathematik in der Schule* 59 (73), 2-9
- van Randenborgh, Chr. (2014). Mathematische Instrumente erforschen – ein Ideenkonglomerat entdecken. *Der Mathematikunterricht* 60 (6), 56-61
- van Randenborgh, Chr. (2015a). Pantographen entdecken. Verborgene Ideen im Mathematikunterricht aufdecken. *Praxis der Mathematik in der Schule* 57 (61), 19-25
- van Randenborgh, Chr. (2015b). Instrumente der Wissensvermittlung im Mathematikunterricht. Wiesbaden: Springer
- van Randenborgh, Chr. (2018). Mathematiklernen beim Einsatz eines mathematischen Instruments. *mathematica didactica* 41 (2018) 1, 1-27
- Schupp, H. (1988). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe 1 zwischen Tradition und neuen Impulsen. *Der Mathematikunterricht* 34 (6), 5-16