

Ein Habicht auf der Jagd nach dem Sperbernest

Einleitung

Am Beginn eines realitätsbezogenen Mathematikunterrichts steht meist eine Frage, zu deren Beantwortung schrittweise immer bessere Daten immer realitätsnäher modelliert werden. In diesem Unterrichtsvorschlag geht es anders herum. Am Beginn steht eine – hoffentlich auch die Schülerinnen und Schüler – motivierende Information aus einer langjährigen Vogelbeobachtung von Helmut Steiner im Raum südlich von Linz. Wir versuchen Modelle und Simulationen zu finden, um diese empirischen Daten besser zu verstehen. *Anmerkung:* Eine ausführliche Version dieses Beitrags findet sich im aktuellen ISTRON Band 6 (Maaß & Götz, 2019).

Ausgangspunkt: Ein Habicht fliegt auf der Jagd nach Beute (Vögel, Nagetiere etc. – vgl. Mebs & Schmidt, 2006) bis zu 5 km weit von seinem Nest. Sperber gehören zu seinen Beutetieren; wenn ein Habicht ein Sperbernest entdeckt, tötet er die Jungen. Dennoch zeigen die Forschungsdaten, dass in etwa 3 km Entfernung vom Habichtnest etwa 80% der Sperber erfolgreich brüten, also vom Habicht nicht entdeckt werden. Wie lässt sich das erklären? Eine Teilantwort ist „Tarnung“ – Sperber bemühen sich, ihr Nest zu verstecken und sich nicht auffällig zu benehmen.

Ein erstes Modell

Für den Start des ersten Modellierungsansatzes vereinfachen wir sehr: Wir setzen den Habicht in den Ursprung eines Koordinatensystems, den Sperber auf die x -Achse in angemessener Entfernung a (in Metern) und betrachten den Winkel α zwischen den beiden Tangenten an den Kreis mit dem „Finde“- oder „Sichtbarkeits“-Radius b Meter um das Nest des Sperberpärchens. Abbildung 1 veranschaulicht schematisch die Situation, wobei ein realitätsnäherer Winkel α viel kleiner ist: es ergibt sich dort gerundet eine (geometrische) Wahrscheinlichkeit p von $\frac{25}{360} = 0,07$.

Nehmen wir nun ein paar realitätsnahe Werte, um einen solchen Winkel α auszurechnen. Die Entfernung der beiden Nester soll 3 km betragen und der Finde-Radius 20 Meter. Wie groß ist dann der Winkel α ? – Abbildung 1 erinnert uns daran, wie wir im rechtwinkligen Dreieck den Winkel $\alpha/2$ zwischen der x -Achse und der „oberen“ Tangente ausrechnen können. Die Hypotenuse ist die Entfernung a zwischen beiden Nestern, sie ist also etwa 3 km (oder 3000 Meter) lang. Die Gegenkathete b ist der Radius des

„Finde“-Kreises, sie ist also 20 Meter lang. Daraus gewinnen wir mit $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{20}{3000}$ den (sehr kleinen) Winkel $\alpha = 0,76^\circ$ (gerundet).

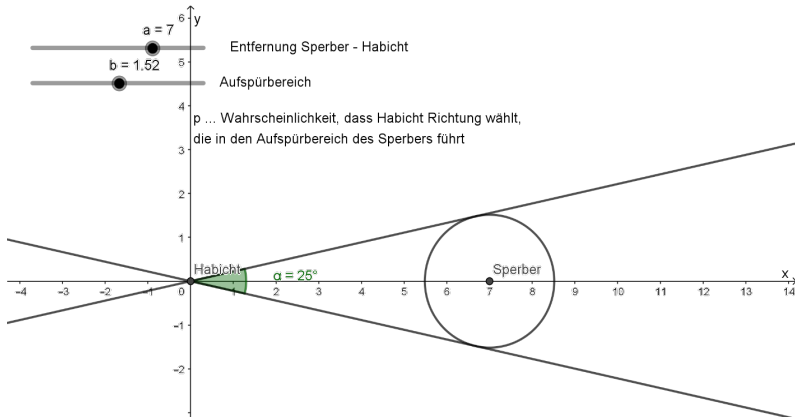


Abb. 1: Geometrische Veranschaulichung des ersten Modells (fiktive Skalierungen)

Wenn wir – wiederum sehr vereinfachend – annehmen, dass der Habicht rein zufällig die Richtung auswählt, in der er losfliegt und dann immer geradeaus fliegt, besteht demnach eine (wiederum sehr kleine) Wahrscheinlichkeit von $\frac{0,76}{360} = 0,002111$ (gerundet) dafür, dass er in den Kreis gelangt, innerhalb dessen er das Sperbernest entdeckt.

Frägt man nun nach der Anzahl n der Flüge (der Versuche des Habichts), um eine „Trefferwahrscheinlichkeit“ von $0,2$ ($= 1 - 0,8$) zu erhalten, also mindestens einen „Treffer“ zu landen, dann ergibt sich aus der Gleichung $1 - (1 - 0,002111)^n = 0,2$ die Lösung $n = 106$ (gerundet).

Rückblick: Was lernen wir aus dem ersten Versuch? Für einen allerersten sehr vereinfachten Modellansatz haben wir kein schlechtes Ergebnis erhalten. Es scheint plausibel, dass ein Habicht in der Brutzeit (der Sperber) von etwa 34 Tagen um die 100 Jagdausflüge startet. Das wären rund drei pro Tag. Es ist aber nicht realistisch, dass er jedes Mal in eine zufällige Richtung startet und nichts dazu lernt.

Flugsimulationen

Wir lassen den Zufall entscheiden, in welche Richtung der Habicht losfliegt und welche Flugstreckenlänge zwischen 100 und 1000 m er zurücklegt. Sein erster Landungspunkt ist zugleich sein zweiter Startpunkt usw. Eine Simulation mit Tabellenkalkulation zeigt rasch, dass eine solche Modellierung den Habicht nicht recht vom Fleck kommen lässt.

Wir stellen also den Habicht mit einem Gedächtnis aus und modellieren so, dass er sich bei jedem Zwischenstopp seine ursprüngliche Flugrichtung plus minus maximal ε Grad („ungefähr“) merkt: Abbildung 2. Die tatsächliche Abweichung wird dabei zufällig aus dem Intervall $[-\varepsilon, \varepsilon]$ gewählt.

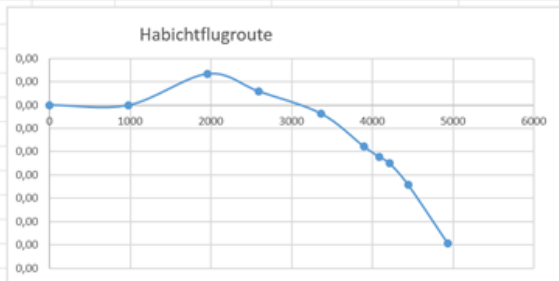


Abb. 2: Eine simulierte Flugroute des Habichts

Dabei ist zu beachten, dass die Entfernung zum Sperbernest mit den Koordinaten (3000|0) auch während des Fluges abgefragt wird, nicht (nur) von den jeweiligen Zwischenhalten aus. Dabei müssen also (Normal-)Abstände von Strecken – nicht Geraden! – zu einem festen Punkt berechnet werden. Das Iterieren von entsprechenden Simulationen zeigt das zu erwartende Resultat: Je größer die maximal zulässige Abweichung ε festgesetzt wird, desto geringer ist im Mittel die Anzahl der „Treffer“. Bei z. B. 20 Grad maximaler Abweichung konstatieren wir im Mittel gerade einen „Treffer“ in 100 Versuchen, bei fünf Grad immerhin sieben.

Andreas Lindner (Linz) hat dazu eine Simulation von jeweils 20 Flügen in GeoGebra programmiert, die maximale Abweichung ist dabei per Schieberegler einzustellen. In Abbildung 3 beträgt sie 10 Grad von der Ausgangsflugrichtung längs der positiven x -Achse. Unter diesen Bedingungen findet in der abgebildeten Simulation der Habicht einmal das Sperbernest. Es zeigt sich, dass so der Jagderfolg des Habichts in der Natur recht gut modelliert und die empirischen Werte nachvollzogen werden können.

Möchte man noch etwas rechnen, dann legen wir die Etappenlänge l z. B. mit 620 m fest und eine konstante Richtungsänderung ε . Außerdem lassen wir den Habicht immer fünf Etappen fliegen, wobei die erste in x -Richtung erfolgen soll. Danach entscheidet er viermal mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, ob er um den Winkel ε nach links (l) oder rechts (r) von der vorherigen Richtung abweicht: *Bernoullimodell*. Von den 16 entstehenden Möglichkeiten liegen immer zwei symmetrisch zur x -Achse. Im worst case entscheidet er sich z. B. immer für „links“ (llll). Wenn die gesamte Abweichung von der ursprünglichen Flugrichtung 20 m nicht überschreiten soll, dann ergibt sich gerundet

Simulation von 20 Flügen mit unterschiedlichen Wegstrecken

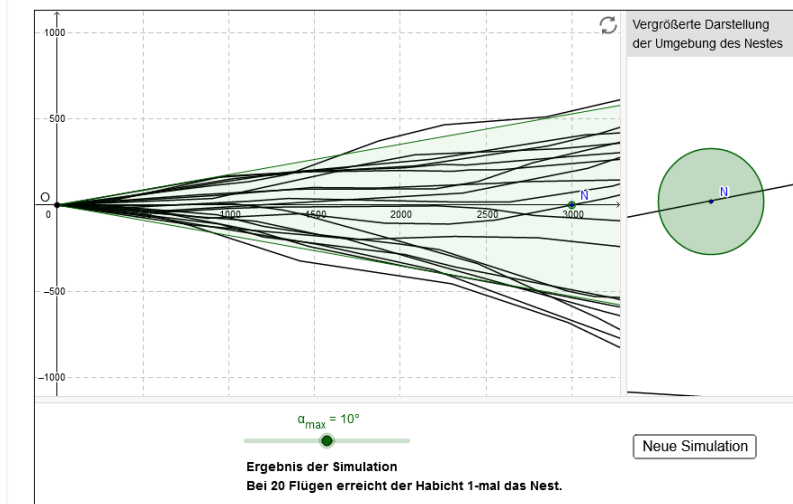


Abb. 3: Je zwanzig Habichtflüge mit zufälliger Etappenlänge (A. Lindner, Linz) aus $620 \cdot (\sin \varepsilon + \sin 2\varepsilon + \sin 3\varepsilon + \sin 4\varepsilon) = 20$ die betragsmäßig kleinste Lösung von $\varepsilon = 0,003$ rad, das sind $0,18^\circ$. Für den Verlauf $rlrl$ bzw. $lrlr$ (Abweichung $2 \cdot l \cdot \sin \varepsilon$) ist die maximal zulässige Abweichung (ger.) $\varepsilon = 0,92^\circ$. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $\frac{2}{16}$ wie auch für die Fälle $llll$ bzw. $rrrr$.

Ausblick und Resümee

In Fortführung unserer Überlegungen könnten mehr Beutemöglichkeiten oder mehr Habichte eine Rolle spielen. Auch der „Finde-Radius“ b und die Entfernung Räuber – Beute a können variiert werden.

In den hier vorgestellten Modellen sind sowohl stochastische als auch geometrische (und trigonometrische) Fragestellungen von der neunten bis zur elften Schulstufe angesprochen worden.

Literatur

Maaß, J. & Götz, S. (2019). Der Beuteflug des Habichts und das Nest des Sperbers. Einfache Modelle für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht. In I. Grafenhofer & J. Maaß (Hrsg.), *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, ISTRON Band 6*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Mebis, T. & Schmidt, D. (2006). *Die Greifvögel Europas, Nordafrikas und Vorderasiens: Biologie, Kennzeichen, Bestände*. Stuttgart: Franckh-Kosmos Verlag.