

Frederik DILLING, Siegen

Ebenen und Geraden zum Anfassen – Lineare Algebra mit dem 3D-Drucker

Einleitung

Der Einsatz der 3D-Druck-Technologie für den Unterricht ist in den letzten Jahren von zunehmender Relevanz in der mathematikdidaktischen Forschung. Dies hat unter anderem das Minisymposium zu digitalen Fabrikationstechnologien auf der GDMV-Tagung 2018 gezeigt (vgl. Witzke & Hoffart, 2018). Die 3D-Druck-Technologie ermöglicht die individuelle Herstellung von Anschauungsmitteln durch die Lehrkraft und die Schüler. Sowohl im Entwicklungsprozess als auch bei der Verwendung der Materialien rückt die Begriffsbildung in den Vordergrund. Diese ist gerade im Unterricht der Sekundarstufe II mit besonders komplexen Begriffen wichtig, spielt aber auf Grund kalkülorientierter Abschlusstests eine immer geringere Rolle. Am Beispiel der Analysis zeigt Dilling (2019) einen stoffdidaktisch reflektierten Umgang mit zentralen Begriffen der Differential- und Integralrechnung unter der Verwendung der 3D-Druck-Technologie auf. Dieses Konzept soll im folgenden Beitrag auf den Themenbereich der Linearen Algebra erweitert und am Beispiel eines 3D-gedruckten Koordinatenmodells konkretisiert werden.

3D-Druck und Lineare Algebra

Die Lineare Algebra stellt eines der zentralen Themengebiete des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe II dar. Vohns (2013) unterscheidet die beiden Aspekte Algebraisierung, bei dem geometrische Beziehungen durch Gleichungen repräsentiert werden, und Geometrisierung, bei dem algebraische Sachverhalte geometrisch visualisiert werden. Mit Hilfe der 3D-Druck-Technologie können beide Aspekte unterstützt werden. Im Sinne der Algebraisierung können geometrische Sachverhalte dargestellt werden, um sie algebraisch beschreiben zu können, für die Geometrisierung ist die 3D-Druck-Technologie eine Visualisierungsmöglichkeit algebraischer Sachverhalte.

Die 3D-Druck-Technologie selbst stellt eine interessante Anwendung der Linearen Algebra dar. So ist der Bauraum im CAD-Programm eine Parallelprojektion eines dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystems. Die konstruierten Modelle werden in einer so genannten STL-Datei gespeichert. Hierbei handelt es sich um eine rein algebraische Beschreibung des Objektes durch die Angabe bestimmter Koordinaten des dreidimensionalen Raumes. Mittels einer sogenannten gcode-Datei werden Steuerungsbefehle an den 3D-Drucker gesendet. Das zu druckende Objekt wird hier in schichtweise

übereinander angeordneten zweidimensionalen Koordinatensystemen beschrieben, sodass das Objekt durch den Drucker schichtweise aufgebaut werden kann. Dies ermöglicht im Unterricht den Aufbau auf Grundvorstellungen der 2D-Geometrie.

3D-gedruckte Koordinatenmodelle

Räumliche Koordinatenmodelle gelten im Unterricht der Analytischen Geometrie schon lange als hilfreiche Visualisierungsmöglichkeit. Ein besonderer Vorteil ist die „echte“ Dreidimensionalität, die es im Vergleich zu Darstellungen am Computer oder auf Papier erlaubt, Längen und Winkel unverzerrt abzubilden (vgl. Henn & Filler, 2015). Mathematische Sachverhalte und lebensweltliche Objekte können im Modell einfach nachgebaut werden (vgl. Breuer, 2014).

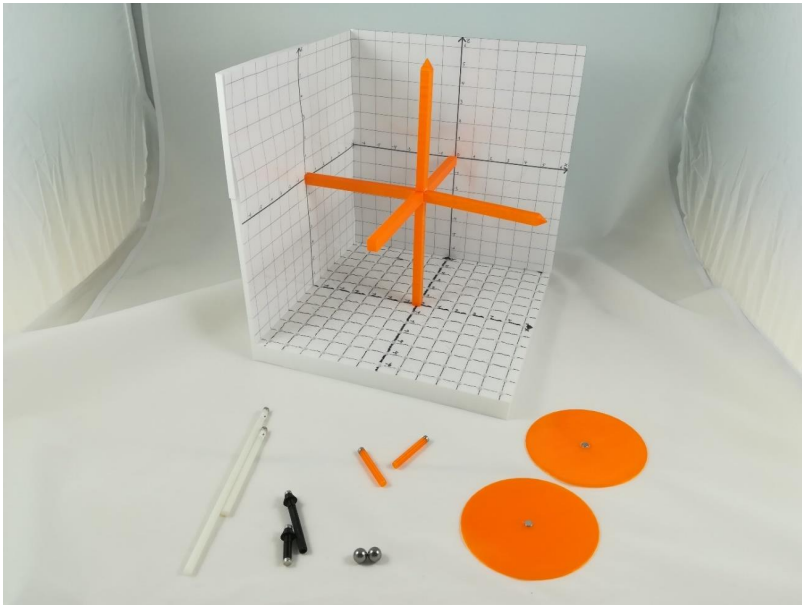


Abbildung 1: 3D-gedrucktes Koordinatenmodell

Es gibt viele Möglichkeiten, dreidimensionale Koordinatenmodelle in den Unterricht zu integrieren. Die Auswahl reicht von aufwändigen käuflichen bis zu einfachen aus Papier gebastelten Modellen. Mit Hilfe der 3D-Druck-Technologie lassen sich ebenfalls Koordinatenmodelle herstellen, die individuell an die Bedürfnisse der Lernenden angepasst werden können. Das nachfolgend beschriebene Modell ermöglicht die Darstellung von Punkten, Pfeilen, Geraden und Ebenen (Abbildung 1).

Geraden und Ebenen können im Koordinatenmodell auf unterschiedliche Weise dargestellt werden. Die Parameterdarstellung ermöglicht die Festlegung einer Geraden oder Ebene durch ein bzw. zwei Vektoren. Durch das Verändern der Vektoren kann die Abhängigkeit dynamisch erkundet werden. Außerdem kann der vielfach kritisierte Begriff Ortsvektor reflektiert thematisiert werden. Bei der Normalenform von Ebenen wird diese durch einen festen Punkt und einen orthogonal zur Ebene stehenden Vektor festgelegt. Durch das dynamische Verändern des Normalenvektors können Abhängigkeiten zwischen Ebene und Vektor untersucht werden. Die Koordinatenform ermöglicht schließlich die Festlegung einer Ebene durch drei auf den Koordinatenachsen liegende Punkte. Die Punkte im Modell können auf den Achsen verschoben werden und die Ebene passt sich dynamisch an. Durch die parallele Visualisierung unterschiedlicher Darstellungsformen für Ebenen im Modell können wichtige Eigenschaften für die Umrechnung zwischen diesen Formen entwickelt werden. Die unterschiedlichen Darstellungsformen von Ebenen sind in Abbildung 2 veranschaulicht.

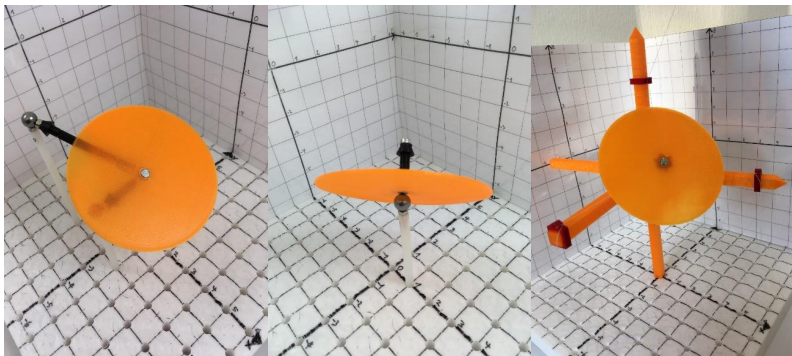


Abbildung 2: Visualisierung der Darstellungsformen von Ebenen

Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen im dreidimensionalen Raum lassen sich in Parallelprojektionen unzureichend darstellen. Insbesondere die Unterscheidung zwischen windschiefen und sich schneidenden Geraden kann nicht verdeutlicht werden. Dies sorgt häufig für Verständnisproblemen bei Schülern. Das 3D-Modell ermöglicht das eigenständige Erkunden von Lagebeziehungen durch die Schüler. Winkel und Abstände zwischen den Geraden sind im 3D-Modell unverzerrt dargestellt und können mit einem Geodreieck direkt gemessen werden. Zwei windschiefe und zwei sich schneidende Geraden sind in Abbildung 3 zu sehen.

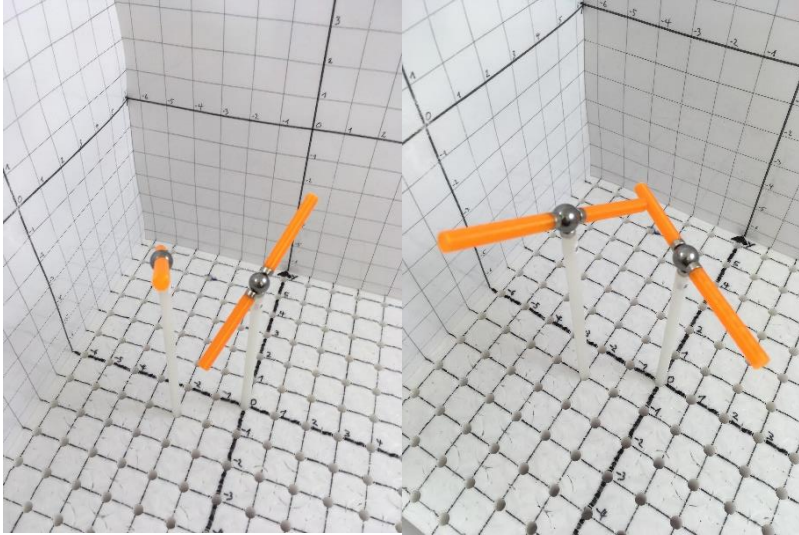


Abbildung 3: Zwei windschiefe (links) und zwei sich schneidende Geraden (rechts)

Fazit

Die Nutzung der 3D-Druck-Technologie im Themenbereich Lineare Algebra ermöglicht den Schülern ein enaktives Erkunden geometrischer Sachverhalte. Durch die Koordinatisierung im CAD-Programm und in Koordinatenmodellen wird die Vernetzung algebraischer und geometrischer Aspekte gefördert.

Literatur

- Breuer, D. (2014). Geometrie im Klettergarten mit dem 3-D-Modell. *Praxis der Mathematik in der Schule* 56 (58), 15–22.
- Dilling, F. (2019). *Der Einsatz der 3D-Druck-Technologie im Mathematikunterricht Theoretische Grundlagen und exemplarische Anwendungen für die Analysis*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Henn, H.-W. & Filler, A. (2015). *Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. Algebraisch verstehen - geometrisch veranschaulichen und anwenden*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.
- Vohns, A. (2013). Von der Vektorrechnung zum reflektierten Umgang mit vektoriellen Darstellungen. In: Allmendinger, H., Lengnink, K., Vohns, A. und Wickel, G. (Hrsg.). *Mathematik verständlich unterrichten. Perspektiven für Unterricht und Lehrerbildung*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Witzke, I. & Hoffart, E. (2018). Der Einsatz digitaler Fabrikationstechnologie am Beispiel des 3D-Drucks für den Mathematikunterricht – Grundlegungen und Einsatzmöglichkeiten. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018*, 129–30.