

Paul GUDLADT, Oldenburg

## **Deutungsperspektiven zum Prozentbegriff: Erste Ergebnisse einer empirischen Untersuchung**

Die Prozentrechnung bereitet vielen Schülerinnen und Schülern (im Folgenden mit SuS abgekürzt) in der Sekundarstufe I Schwierigkeiten. Erfahrung aus der Praxis und mehrfache empirische Studien belegen dies. Beispielsweise zeigt PISA 2000 (Jordan, Kleine et al. 2000) auf, dass deutsche SuS verbreitet Probleme damit haben, aus Grundwert und Prozentwert den Prozentsatz zu bestimmen. Zurückgeführt wird dieser Umstand auf eine unzureichende Verankerung des Prozentbegriffs und eine zu starke formale Bindung an die Lösungswege des Dreisatzes. Passend dazu zeigt sich in einer empirischen Studie von Hafner (2011), dass der Dreisatz unter seinen Probanden die häufigste Lösungsstrategie für Standardaufgaben der Prozentrechnung ist.

Hafner arbeitet in seiner Untersuchung im wesentlichen fehlerhafte Lösungswege heraus, die er auf Rechenfehler und Zuordnungsfehler bei mathematischen Operationen sowie Größen zurückführt. Ziel der qualitativen Untersuchung war es, Fehlermuster und -strategien sowie die zugrundeliegenden Vorstellungen zu rekonstruieren. (ebd.)

Ähnliche Schwierigkeiten stellt Sill (2010) in einer empirischen Erprobung heraus, in der Heranwachsende aus verschiedenen Bildungseinrichtungen Prozentsätze als Bruchzahlen interpretieren sollten.

### **Das Forschungsvorhaben**

Die aufgezeigten Forschungen beschäftigten sich also vorrangig damit, Probleme von SuS im Bereich der Prozentrechnung und den damit verbundenen Grundaufgaben (Grundwert, Prozentwert und -satz gesucht) zu identifizieren. Um die vorhandenen Forschungsergebnisse zu erweitern, fokussiert sich das Interesse des hier diskutierten Vorhabens auf stärker kompetenzorientierter Sicht auf die Vorstellungen, die SuS bei der Prozentrechnung aktivieren. Hierzu wurde eine empirische Untersuchung durchgeführt, in der 24 SuS aus der siebten und achten Klasse eines Gymnasiums und einer Oberschule in halbstandardisierten Interviews befragt wurden.

Ziel der Interviews war es, das Prozentrechnen unter verschiedenen Deutungsperspektiven zu thematisieren, um ein möglichst ganzheitliches Bild vom Verständnis der SuS zu gewinnen. Die Interviews wurden transkribiert und mit Hilfe der funktionalen Argumentationsanalyse (Toulmin 1975) gemäß des interpretativen Forschungsparadigmas ausgewertet.

## Erste Ergebnisse

Der vorliegende Beitrag beschränkt sich aus Platzgründen auf die erste Aufgabe der Interviewreihe, in der die SuS in Anlehnung an Sill (2010) einen Prozentsatz als gemeinen Bruch interpretierten sollten. Die besondere Schwierigkeit für die SuS lag dabei darin, dass der Grundwert nicht im Sinne einer Zahl gegeben war, sondern nur im sachlichen Kontext beschrieben wurde. Die Aufgabe lautete:

5% aller Schülerinnen und Schüler einer Schule gehen zu Fuß zur Schule, was bedeutet das?

Zur Beantwortung der Frage erhielten die Interviewten drei Antwortmöglichkeiten und mussten sich zwischen:  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{1}{20}$  und/oder  $\frac{15}{100}$  entscheiden.

Bei nahezu allen befragten Schülerpaaren fiel die Wahl auf den Bruch  $\frac{1}{20}$ , was anschließend genauer begründet werden sollte. Dazu erweiterten die SuS  $\frac{1}{20}$  auf  $\frac{5}{100}$  und setzten diesen Bruch mit 5% gleich. Sie gingen dabei algorithmisch vor und zeigten keine Vorstellungen, in denen eine inhaltliche Begründung der Gleichheit erkenntlich gewesen wäre. Deswegen wurden sie dazu aufgefordert, diesen Zusammenhang ikonisch zu repräsentieren. Dazu sollten sie den Bruch  $\frac{1}{20}$  darstellen und erklären, warum dieser wertgleich zu 5% ist.

In der Auswertung der Daten konnten für die hintergründigen Denkprozesse der SuS insgesamt vier unterschiedliche Kategorien identifiziert werden. Im Folgenden werden davon die zwei kurz vorgestellt, in denen die SuS im Wesentlichen über das Erweitern des Bruchs argumentiert haben.

### Erweitern als Verfeinern

SuS aus dieser Kategorie unterstellten die Gleichheit zwischen 5% und  $\frac{5}{100}$  und argumentierten nur für die Wertgleichheit zwischen  $\frac{1}{20}$  und  $\frac{5}{100}$ . Dabei gingen sie vor, wie es Wartha (2007) unter der gleichnamigen Erweiterungstechnik beschreibt:

Sie zeichneten einen Kreis, den sie zuerst in zwanzig Teile unterteilten, wovon ein Kreisstück markiert wurde. Anschließend unterteilten sie jedes einzelne Stück in fünf kleinere Stücke und verfeinerten damit die Unterteilung auf insgesamt 100 Stücke.

Magdalena argumentiert dann beispielsweise:

M [...]einen davon (malt einen Teil rot aus) und den könnte man den (zeigt auf den markierten Teil) noch also in fünf Stücke einteilen und dann und die (zeigt auf den Rest des Kreises) auch jeweils in fünf Stücke einteilen und dann hat man fünf und dann ist das genau das Gleiche wie ein zwanzigstel

Der Anteil von einem der 20 Stücke wird also als gleich zu fünf Stücken von den 100 identifiziert.

Die Transformation von der ikonischen Darstellung hin zum Bruch weist auf eine Anteilsvorstellung von Brüchen hin, bei der sich ein Bruch aus zwei Größen zusammensetzt: Dem Zähler, der angibt wie viele Teile zu betrachten sind, und dem Nenner, der angibt, wie fein das zu betrachtende Objekt unterteilt ist. Das Verhältnis aus diesen beiden Bezugsgrößen ist entscheidend für den Anteil.

### Erweitern als Vervielfachen

SuS aus dieser Kategorie gingen ebenfalls von der unterstellten Gleichheit zwischen 5% und  $\frac{5}{100}$  aus, zeichnen ebenfalls ein Objekt und unterteilten dies in zwanzig Teile, wovon sie eins markierten (vgl. Abbildung 1). Um jedoch die Gleichheit zwischen dieser Darstellung von  $\frac{1}{20}$  und  $\frac{5}{100}$  aufzuzeigen, vervielfachten sie die Ausgangsdarstellung, um insgesamt 100 Objekte zu erhalten, von denen dann 5 markiert wurden (vgl. Abbildung 2). Diese SuS generierten also vier zusätzliche, jeweils in zwanzigstel unterteilte Objekte, um insgesamt auf die Anzahl 100 zu kommen.

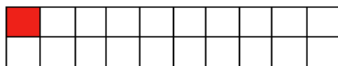


Abbildung 1

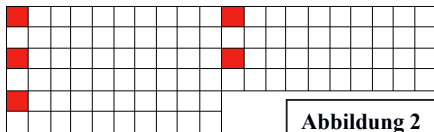


Abbildung 2

Ihre Überlegungen lassen sich damit der Grundvorstellung der Prozentrechnung *von-Hundert* (Blum und vom Hofe 2003) zuordnen. Diese Grundvorstellung ist darüber definiert, dass  $p\%$  von einem Grundwert genau  $p$ -Einheiten wären, wenn der Grundwert aus 100 Einheiten bestünde. Die SuS dieser Kategorie scheinen genau diese 100 Einheiten zu benötigen, um 5% darstellen zu können.

Die Äußerung von Karsten lässt sich in diese Richtung interpretieren:

K dann müsste man irgendwie darstellen das das alles äh.. ja man hundert Kästchen malen würde und dann fünf rot malen würden

Auffallend ist hierbei, dass für die Interviewten die Gleichheit zwischen  $\frac{1}{20}$  und  $\frac{5}{100}$  nicht offensichtlich ist, sondern durch eine Vervielfachung des Ausgangsobjekts erst noch hergestellt werden muss.

## Zusammenfassung

Im Vergleich der beiden Kategorien fällt auf, dass beide zur Darstellung der Gleichheit zwischen  $\frac{1}{20}$  und 5%, respektive  $\frac{5}{100}$ , 100 Objekte benötigen, von denen 5 markiert sind. Der Unterschied zwischen diesen 100 Objekten liegt aber in der Bezugsgröße. Beim Erweitern als Verfeinern beziehen sich die beiden Brüche auf das gleiche Objekt, welches nur unterschiedlich unterteilt wird. Dem gegenüber wird beim Erweitern als Vervielfachen das ursprüngliche Objekt vervielfacht. Durch das Vervielfachen stehen nicht mehr Anteile im Vordergrund, sondern Objekte. Entsprechend erscheint die erste Deutung stärker *anteilsorientiert*, während die zweite eher *objektorientiert* zu verstehen ist. In der vorliegenden Forschung zeigte sich die Anteilsorientierung als tragfähiger, als die Objektorientierung. Dies zeigte sich vor allem bei der Variation des Grundwerts. Im Vortrag wurden hierzu Beispiele diskutiert.

## Literatur:

- Blum, W. und R. vom Hofe (2003). "Welche Grundvorstellungen stecken in der Aufgabe?" In: Mathematik Lehren, 18 (2003). S. 14-18
- Hafner, T. (2011). "Proportionalität und Prozentrechnung in der Sekundarstufe I. Empirische Untersuchung und didaktische Analysen." Vieweg+Teubner Research. Perspektiven der Mathematikdidaktik. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.
- Jordan, A., et al. (2000). "Mathematische Fähigkeiten bei Aufgabe zur Proportionalität und Prozentrechnung - Analysen und ausgewählte Ergebnisse." In: Neubrand, Michael; Weihrauch, Klaus: Mathematische Kompetenzen Von Schülerinnen und Schülern in Deutschland: Vertiefende Analysen Im Rahmen Von PISA 2000. Wiesbaden: VS, Verlag für Sozialwissenschaften, 2004, S. 159-173.
- Sill, H.-D., (2010). Probleme im Umgang mit Prozenten. Mathematische Kompetenzen entwickeln und erfassen. In: Herget, Wilfried; Richter, Karin: Mathematische Kompetenzen entwickeln und erfassen. Festschrift für Werner Walsch zum 80. Geburtstag. Hildesheim, Franzbeek. S.137-150
- Toulmin, S. E. (1975). Der Gebrauch von Argumenten. Kronberg., Scriptor.
- Wartha, S. (2007). "Längsschnittliche Untersuchungen zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs." In: Texte zur Mathematischen Forschung und Lehre 54: 978-973.