Martin Erik HORN, Berlin

Hypergeometrie: Aus zwei werden immer drei

Andrews & Berndt (2013, S. 135) schreiben als Herausgeber des vierten Teils von Ramanujans verlorenem Notizbuch: „His original formulation is incorrect, but…“ Das ist so nicht ganz zutreffend. Meine ursprüngliche Formulierung des Bilateralen Binomialtheorems (ist korrekt und) lautet:

$$(x+y)^n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \ldots + \binom{n}{k-1} x^{k-1} y^{n-k+1} + \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + \ldots$$

Mit Division durch y^n und der Ersetzung $z = x/y$ ergibt sich die Grundformel des Bilateralen Binomialtheorems von

$$(1+z)^n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \binom{n}{k} z^k = \ldots + \binom{n}{k-1} z^{k-1} + \binom{n}{k} z^k + \binom{n}{k+1} z^{k+1} + \ldots$$

Dahinter steckt aber immer noch die Zerlegung einer eingeklammerten Größe in die beiden Teilgrößen x und y bzw. 1 und z. Wir zerlegen also etwas in zwei Teile.

Dabei erhalten wir eine zweiwertige, duale Symmetrie: Vertauscht man x und y (bzw. 1 und z, wenn man es richtig anstellt) ist alles immer noch so wie vorher.

Die Behauptung in diesem Beitrag ist nun, dass neben diese zweiwertige Symmetrie auch eine dreiwertige Symmetrie tritt. Es bildet sich ein Muster aus drei nahezu gleichartigen Teilen. Zwei sind also immer auch gleichzeitig drei, wenn man aus einer geeigneten Perspektive auf die zwei blickt.

Zur Diskussion der oben angegebenen Formeln nehme ich mir im Übrigen die akademische und die didaktische Freiheit, Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}$$

mit Studierenden fachhochschulischer Studiengänge auch dann durch eine Fakultätszuweisung mit Ausrufezeichen zu beschreiben, wenn n oder k keine natürlichen Zahlen sind. Es ist sinnvoll, ein bei Nebenfach-Studierenden gut eingeprägtes und anschaulich vorliegendes Konstrukt wie der Fakultät allmählich und schleichend durch Parallelnutzung der Gamma-Funktion zu ergänzen und nicht abrupt zu ersetzen.

Existiert in den obigen Summen in keinem Term ein identisches n und k, so sind die Summen beidseitig unbeschränkt und verlaufen sowohl mit unendlich vielen Termen nach rechts ins Positive wie auch mit unendlich vielen Termen nach links ins Negative. Solche beidseitig unendlichen Summen werden bilateral genannt.

Da k beliebig und vor allem auch unganzzahlig gewählt werden kann, gilt:

$$\frac{d}{dk}(x+y)^n = \frac{d}{dk}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+y)^n = \text{konstant}$$

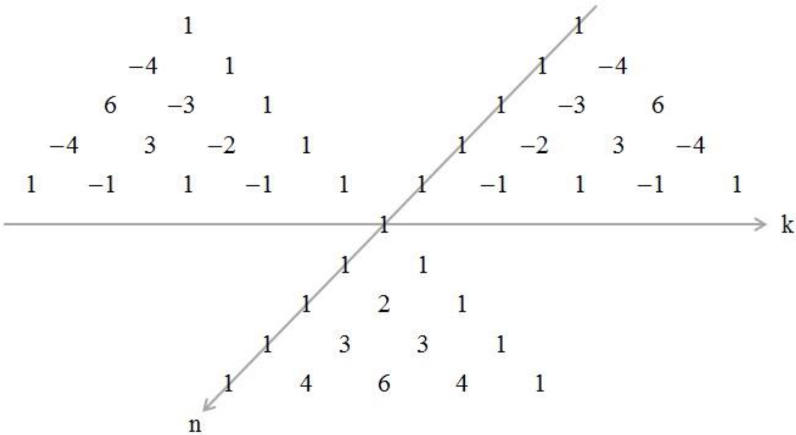
Die Binomialsumme ist – sofern sie konvergiert – immer gleich groß und immer gleich $(x + y)^n$, egal über welche Terme im Abstand von 1 bilateral von minus Unendlich bis plus Unendlich aufsummiert wird (Horn 2003). Das ist die Hauptaussage des Bilateralen Binomialtheorems.

Die Pascalsche Ebene

Da die Binomialkoeffizienten gemäß der vorseitig unten angegebenen Formel auch für nicht-ganzzahlige Werte und damit für jeden Punkt einer Ebene definiert oder im Falle von Polstellen negativer ganzer Zahlen durch

$$\binom{n}{k} = \lim_{h\to 0}\frac{(n+2h)!}{(k+h)!(n-k+h)!} = \lim_{h\to 0}\frac{\Gamma(n+2h+1)}{\Gamma(k+h+1)\Gamma(n-k+h+1)}$$

beliebig nahe angenähert werden können, kann die mit den Binomialkoeffizienten gefüllte Pascalsche Ebene vollständig bedeckt werden. Für die ganzzahligen Werte ungleich Null ergibt sich die folgende Struktur:



Es zeigt sich ein dreiwertig symmetrisches Konstrukt. Diese drei Pascalschen Dreiecke stehen in einer Binomialsymmetrie zueinander. Eine

A. Frank, S. Krauss & K. Binder (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2019. Münster: WTM-Verlag.

Summierung parallel zur k-Achse wird in entweder identische oder aber phasenverschobene ebenfalls gültige Summierungen überführt, wenn die Summierungen parallel zur n-Achse oder zur (n – k)-Achse erfolgen.

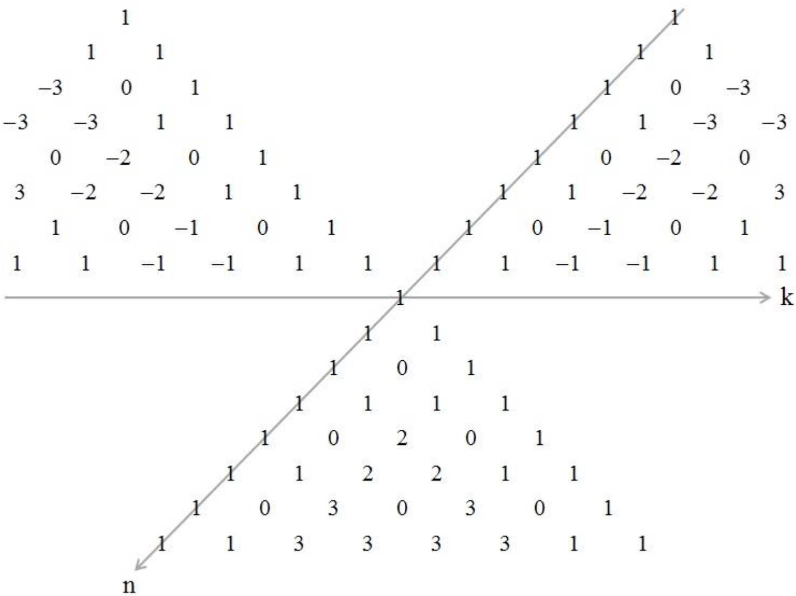
Eine Zerlegung in zwei Teile führt somit auf eine dreiwertige Musterbildung. In der zweiwertigen Symmetrie einer Aufspaltung ist mathematisch zwangsläufig immer auch die dreiwertige Symmetrie der drei Pascalschen Dreiecke enthalten.

Und diese dreiwertige Symmetrie des Bilateralen Binomialtheorems ist mathematisch allgegenwärtig, denn die Binomialentwicklung ist ja letztendlich nichts anderes als ein simples Beispiel einer Taylorentwicklung.

Die Pauli-Pascalsche Ebene

Eine der wesentlichsten und der wichtigsten Entwicklungsschritte der Mathematik der letzten Jahrhunderte war die Identifikation von Einheitsvektoren mit den Basiselementen der Pauli-Algebra durch Grassmann (Horn 2018). Unsere gesamte moderne Geometrie baut darauf auf.

Und es ist erstaunlich, dass die dreiwertige Symmetrie des Binomialtheorems durch eine geometrische Betrachtung ein weiteres Mal dreiwertig gebrochen wird.



Wird ein Vektor $\mathbf{r} = x\,\sigma_x + y\,\sigma_y$ in die Teilvektoren $x\,\sigma_x$ und $y\,\sigma_y$ zerlegt, so führt das Bilaterale Binomialtheorem für $\mathbf{r}^n = (x\,\sigma_x + y\,\sigma_y)^n$ auf eine dreimal-drei-wertige Struktur (Horn 2007). Jede Pascalsche Dreiecks-Zahl existiert neunfach, sieht man vom Vorzeichen ab.

Grund dafür ist das nicht-kommutativ modifizierte Bildungsgesetz für die Zahlen dieser Pauli-Pascalschen Ebene (siehe Abb. der vorigen Seite): Benachbarte Zahlenpaare werden alternierend addiert und subtrahiert, um die in der nachfolgenden Reihe stehenden Zahlenwerte zu generieren.

Mathematischer und erkenntnistheoretischer Ausblick

Das eingangs genannte Bilaterale Binomialtheorem kann mit Hilfe bilateraler Hypergeometrischer Funktionen (Koornwinder 1994, Horn 2003, Berndt & Chu 2006) abstrakt ausformuliert werden. Allerdings zeigt sich in letzter Zeit, dass sich auch Bezüge zu konkret-anwendungsorientierten Fragestellungen (z.B. Kyppö 2016) aufzeigen und damit didaktisch modellierbare Ansätze gestalten lassen.

Darüber hinaus ist das hier beschriebene Konstruktionsmuster für Bilaterale Zusammenhänge eine Blaupause für weitere Konstruktionen wie z.B.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \binom{n}{k}^m z^k = \begin{array}{c}\text{Verallgemeinerte Bilate-}\\ \text{rale Binomialtheoreme}\end{array} = ?$$

Die so generierten Verallgemeinerten Pascal-Dreiecke höherer Potenzen zeigen ebenso drei- bzw. 3x3-wertige Symmetrien binomialen Ursprungs.

Literatur

Andrews, G. E., Berndt, B. C. (2013). *Ramanujan's Lost Notebook. Part IV*. New York: Springer Science + Business Media.

Berndt, B. C. & Chu, W. (2006). Two entries on bilateral hypergeometric series in Ramanujan's lost notebook, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 135 (2007), 129–134, bzw. S 0002-9939(06)08553-4 [19. Juni 2006].

Horn, M. E. (2003). Bilateral Binomial Theorem, *SIAM Problems and Solutions*, Siam-Problem 03-001. Url: www.siam.org/journals/categories/03-001.php [24. Juli 2003].

Horn, M. E. (2007). Die didaktische Relevanz des Pauli-Pascal-Dreiecks. In *Beiträge zur Jahrestagung der GDCP in Bern 2006, Bd. 27* (S. 557–559) Berlin: LIT-Verlag.

Horn, M. E. (2018). Another Introduction to Geometric Algebra with some Comments on Moore-Penrose Inverses. *Symmetries in Science XVII Proceedings. Journal of Physics: Conference Series* 1071 (2018) 012012, IOP Publishing.

Koornwinder, T. H. (1994). q-Special Functions. A Tutorial. *arXiv:* math/9403216v1, math.CA [21. März 1994] & *arXiv:* math/9403216v2, math.CA [14. Okt. 2013].

Kyppö, J. (2016). *The N-dimensional N-person Chesslike Game Strategy Analysis Model.* Dissertation, Jyväskylä Studies in Computing 250, University of Jyväskylä.