Florian FÜLLGRABE, Kassel & Andreas EICHLER, Kassel

Klassifikation mathematischer Argumentationen

1. Einleitung

Das mathematische Argumentieren ist eine zentrale Kompetenz in der mathematischen Lehre an Schulen und Hochschulen (Brunner, 2014). Ein Teil dieser Kompetenz umfasst das Erstellen mathematischer Argumentationen, darunter einen Beweis. Um als Beweis akzeptiert zu werden, muss eine Argumentation einerseits bestimmten Normen entsprechen (Yackel & Cobb, 1996) und überzeugend sein (Hersh, 1993), also auch eine hinreichende Argumentationstiefe aufweisen. Andererseits sind sogenannte strenge Beweise mit einer angestrebten, quasi-vollständigen und lückenlosen Argumentationskette in Forschung und Lehre unüblich (Jahnke & Ufer, 2015). Vor dem Hintergrund einer angemessenen Argumentationstiefe stellt sich daher die Frage, wann eine Argumentation in einer bestimmten Community als Beweis gelten kann. Diese Frage ist auch relevant, wenn man Argumentationen von Lernenden hinsichtlich der Frage, ob diese ein Beweis seien, empirisch untersucht. In diesem Beitrag wird ein Lösungsvorschlag gemacht, Argumentationen und ihre Argumentationstiefe reliabel zu messen.

2. Theoretische Grundlagen

Unter einer (mathematischen) Argumentation verstehen wir die Verkettung von (mathematischen) Argumenten. Mathematische Argumente bestehen aus einer oder mehreren mathematischen Prämissen und genau einer mathematischen Konklusion, die aus den Prämissen geschlossen wird. Die Prämissen können nach Toulmin in Datum, Regel oder Stützung aufgeteilt werden. Das Datum ist eine Prämisse, von der auf eine Konklusion geschlossen wird. Zur Unterstützung dieses Schlusses kann eine weitere Prämisse als Regel herangezogen werden, ggf. gesichert durch eine Stützung. Ein Argument gilt als gültig, wenn die Konklusion logisch zwingend aus den Prämissen folgt, also der Schluss sicher ist (Brunner, 2004). Unter den für einen direkten Beweis relevanten Schlussarten Deduktion, Induktion und Abduktion gilt einzig die Deduktion als sicher, da per Definition der Gehalt der Konklusion bereits in den Prämissen explizit oder implizit enthalten ist (Bayer, 2007).

3. Definition eines Beweises

In Anlehnung an Stylianides (2007) und Reiss & Heinze (2003) definieren wir direkte Beweise als mathematische Argumentationen für eine zu bewei-

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

sende Behauptung, die aus einer hinreichend vollständigen Argumentationskette aus deduktiven Argumenten bestehen und mit wahren (und bereits bewiesenen, falls nötig) Prämissen starten sowie mit einer wahren Konklusion, der Behauptung, enden (siehe auch Füllgrabe & Eichler, 2019).

Wir nehmen bei dieser Definition eine eher mathematische Perspektive ein und weisen darauf hin, dass die Herausbildung der (individuellen) Definition eines Beweises im Zuge soziomathematischer Normen (Yackel & Cobb, 1996) ausgehandelt wird und auch, nicht untrennbar davon zu unterscheiden, das Resultat einer psychologischen Überzeugtheit (Hersh, 1993) ist.

4. Argumentationstiefe von Beweisen

Die Frage, welche Argumentationstiefe vorliegen muss, damit eine Argumentation als Beweis gilt, ist ebenfalls Gegenstand eines Aushandlungsprozesses. Hierbei existiert eine Diskrepanz zwischen Theorie und Praxis: Einerseits werden strenge Beweise mit ausschließlich Deduktionen und expliziten Nennungen von genutzten Regeln als eine Form von „Idealbild“ in der Mathematik gesehen, allerdings sind diese in der mathematischen Praxis in Forschung und Lehre aufgrund eines unverhältnismäßigen Arbeits- und Schreibaufwands unüblich (Jahnke & Ufer, 2015). Vielmehr ist es üblich, dass manche Aussagen (z.B. Regeln) ungenannt bleiben (Epstein, 2013). Aberdein (2013) formuliert diese Problematik in gewisser Weise um, indem er bei einem Beweis eine Unterscheidung zwischen einer parallel existierenden Inferenzstruktur und Argumentationsstruktur vornimmt. Eine Inferenzstruktur ist das, was als strenger Beweis bezeichnet werden kann, während eine Argumentationsstruktur die Funktion hat, von der theoretischen Existenz der (aus oben genannten Gründen de facto teilweise unsichtbaren) Inferenzstruktur zu überzeugen. Die Problematik ist nun, inwiefern die Inferenzstruktur sichtbar gemacht werden muss bzw. inwiefern die Argumentationsstruktur ausreichend von der Existenz der Inferenzstruktur überzeugt.

Möchte man vorliegende Argumentationen hinsichtlich der Frage, ob diese ein Beweis seien, beurteilen, so stellt sich also die Frage, welche Aussagen in der Argumentationsstruktur genannt werden müssen, um von der theoretischen Existenz eines strengen Beweises zu überzeugen. Da dies aber sowohl durch Normen geprägt als auch durchaus individuell beurteilt wird, umgekehrt aber der Anspruch existieren kann, Argumentationen möglichst reliabel zu klassifizieren (z.B. auch im Rahmen einer Doppelkodierung in empirischen Studien), müssen konkrete Lösungen zu dieser Problematik gefunden werden. Eine mögliche Lösung soll im Folgenden vorgestellt werden, die für eine eigene Studie, in der u.a. Argumentationen klassifiziert werden sollen, genutzt wird (siehe auch Füllgrabe & Eichler, 2019).

5. Klassifikation mathematischer Argumentationen als Beweis

Die Klassifikation mathematischer Argumentationen basiert auf der o.g. Definition eines Beweises, aus der deduktiv Kategorien abgeleitet wurden. Zusätzlich wurden induktive Kategorien gefunden, um weitere Arten von Argumentationen von Beweisen abzugrenzen und sie konkret zu identifizieren.

Die Beurteilung der Argumentationstiefe einer Argumentation hat bei der Klassifikation als Beweis nach der o.g. Definition eine herausragende Stellung. Bei einer vorliegenden Argumentation wird überprüft, ob die Argumentationskette hinreichend vollständig ist. Diese Überprüfung erfolgt, unter Berücksichtigung von Tebaartz und Lengnink (2015), durch den Vergleich mit Beweisen in Form von Musterfällen, die wir aus unserer Sicht als hinreichend vollständig erachten, d.h. die insgesamt die Aussagen bzw. Argumente umfassen, die für eine Klassifikation als Beweis aus unserer Sicht notwendig wären. Diese Musterfälle wurden deduktiv erstellt bzw. induktiv identifiziert: deduktiv dahingehend, dass Beweise zu konkreten zu beweisenden Sätzen selbst erstellt und die notwendige Argumentationstiefe mit verschiedenen Mathematikern diskutiert und festgesetzt wurde, und induktiv dahingehend, dass jene Argumentationen aus dem vorliegenden Datensatz, die als Beweis gelten können, auch als Lösungsvarianten aufgenommen, diskutiert und die notwendigen Argumentationstiefen festgesetzt wurden. Da wir mit Blick auf die o.g. Problematik zur Argumentationstiefe bezweifeln, dass es überhaupt möglich wäre, die notwendige Argumentationstiefe aufgrund ihrer innewohnenden Kontroversität reliabel zu beurteilen, halten wir es für sinnvoll, diese Musterfälle in dieser Form zu setzen, aber sie gleichzeitig auch möglichst transparent zu machen.

Im Konkreten erfolgt bei der Beurteilung der Argumentationstiefe ein Vergleich von vorliegenden Argumentationen mit Musterfällen mehrstufig: zunächst wird ermittelt, welcher Musterfall, d.h. welche Lösungsvariante zum Vergleich herangezogen wird. Anschließend wird überprüft, welche Aussagen aus dem gewählten Musterfall in der vorliegenden Argumentation auftreten. Treten alle als notwendig erachteten Aussagen auf, so wird die Argumentationskette als hinreichend vollständig erachtet.

Wenn zusätzlich zur hinreichenden Vollständigkeit der Argumentationskette die Argumentation für den zu beweisenden Satz mit wahren Aussagen startet (bzw. diese als wahr angenommen werden dürfen), die im weiteren Verlauf der Argumentationskette geschlossenen Konklusionen (unter Berücksichtigung ihrer jeweiligen Prämissen) wahr sind, der Gültigkeitsbereich des zu beweisenden Satzes in der Gesamtheit der Argumentationskette nicht eingeschränkt wird und keine logischen Fehler (z.B. zirkuläre Argumentationen) vorliegen, so kann eine Argumentation als Beweis klassifiziert werden.

6. Diskussion und Ausblick

Aufgrund einer der Beurteilung einer ausreichenden Argumentationstiefe innewohnenden Kontroversität ist es aus unserer Sicht für die Herstellung einer Reliabilität bei der Beurteilung von Argumentationen zwingend notwendig, Musterfälle konkret, begründet und transparent zu setzen und die Argumentationstiefe von Argumentationen daran zu messen. Vor dem Hintergrund eines eigenen Projekts, in dem Argumentationen aus unterschiedlichen Populationen mit einer Stichprobengröße von n=506 Studierenden beurteilt werden müssen, scheint diese Lösung aus theoretischer Sicht notwendig zu sein, um diese reliabel zu beurteilen. Die konkrete Klassifizierung aller Argumentationen mit Angabe eines Koeffizienten zur Bestimmung einer Interraterreliabilität zur Messung dieser Reliabilität soll in zukünftigen Beiträgen erfolgen.

7. Literatur

Bayer, K. (2007). *Argument und Argumentation: Logische Grundlagen der Argumentationsanalyse* (2., überarb. Aufl.). Studienbücher zur Linguistik: Vol. 1. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen.* Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Epstein, R. L. (2013). Mathematics as the Art of Abstraction. In A. Aberdein & I. J. Dove (Hrsg.), *The Argument of Mathematics* (Vol. 11, S. 257–289). Dordrecht: Springer Netherlands.

Füllgrabe, F. & Eichler, A. (2019). Analyse von Beweisprodukten. *In Beiträge zum Mathematikunterricht 2019* (im Druck).

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics,* 24(4), 389–399.

Jahnke, H. N. & Ufer, S. (2015). Argumentieren und Beweisen. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 331–355). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Reiss, K. & Heinze, A. (2003). Reasoning and Proof: Methodological Knowledge as a Component of Proof Competence. In M. A. Mariotti (Hrsg.), *International Newsletter of Proof.*

Stylianides, A. L. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. In *Journal for Research in Mathematics Education* 38(3), S. 289–321.

Tebaartz, P. C. & Lengnink, K. (2015). Was heißt “mathematischer Beweis“? Realisierungen in Schülerdokumenten. In A. Budke, M. Kuckuck, M. Meyer, F. Schäbitz, K. Schlüter & G. Weiss (Hrsg.), *LehrerInnenbildung gestalten: Band 7. Fachlich argumentieren lernen: Didaktische Forschungen zur Argumentation in den Unterrichtsfächern* (1st ed., S. 105–120). Münster, New York: Waxmann.

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education,* 27(4), 458–477.