Jan GUNCAGA, Bratislava (Slowakei) & Karl Josef FUCHS, Salzburg

# DGS und CAS – Hilfsmittel bei der Nutzung Historischer Materialien im Mathematikunterricht

## 1. Einführung

Historische Materialien sind wichtige Dokumente menschlicher Kultur. Sie sind deshalb auch wertvoll für den Mathematikunterricht. Dynamische Geometriesoftware (DGS) und Computer Algebra Systeme (CAS) sind Hilfsmittel bei der Nutzung dieser Materialien im Mathematikunterricht. Der neue Lehrplan ISCED3 für slowakische Gymnasien formuliert für Schulen folgende Ziele:

- Der Bildungsprozess ist darauf fokussiert, dass die Studierenden Technologie/Computer zum Abrufen, Verarbeiten, Speichern und Präsentieren von Informationen benutzen. DGS sollen aufwändige Konstruktionen, CAS numerische Berechnungen und symbolische Manipulationen erleichtern. Die Studierenden können sich damit auf das eigentliche Problem konzentrieren.
- Durch eine lehrplanübergreifende Beschäftigung mit Querschnittsthemen sollen die Studierenden mit der Mathematik als Teil der menschlichen Kultur und als wichtiges Instrument für die Gesellschaft vertraut werden.

Methodisch ist es während des Studiums in der Sekundarstufe II notwendig folgende Aspekte zu berücksichtigen:

- Auswählen repräsentativer historischer Notizen,
- Durchführen verschiedener kleiner Projekte zur Förderung fachübergreifenden Beziehungen wie etwa Mathematik und Bildende Kunst, Mathematik und Raumfahrt oder Mathematik und Billardsport,
- Sammeln von Informationen, die den gegenwärtigen und historischen Gebrauch der Mathematik dokumentieren.

Eine sinnstiftende Verwendung von Softwaresystemen im Unterricht erfordert Veränderungen in der Aus- und Fortbildung von Lehrkräften (siehe Gunčaga, 2011).

Im Bereich der Mathematikdidaktik können wir folgende Fragen stellen:

- Für welche Zielgruppe von Schüler(inne)n (Grundschule, Hauptschule/ Neue Mittelschule, Höhere Allgemeinbildende und Berufsbildende Schule) ist die Nutzung welcher Informationstechnologie wichtig?

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

- Welche Rolle spielen diese Werkzeuge für den mathematischen Erkenntnisprozess, z. B. für das Verstehen von Begriffen, für die Entwicklung der Anschauung, für eine Steigerung der Effektivität des Mathematikunterrichts?
- Wie müssen die Curricula geändert werden?
- Welche Veränderungen wurden bereits realisiert?

## 2. Historische Lehrbücher unter dem Blickwinkel von DGS und CAS

Wir wollen exemplarisch einige Beispiele aus den Lehrbüchern von Franz Močnik (1814-1892) präsentieren und zudem um die Möglichkeiten einer EDV Nutzung (Fuchs, 2007) erweitern. Das erste Beispiel ist aus dem Lehrbuch „Anschauliche Geometrie“ (Močnik, 1856).

$Aufgabe$ 1. Gegeben sind zwei konzentrische Kreise $k$ und $l$ mit gemeinsamem Mittelpunkt $S$. Gegeben ist der Punkt $A$ auf dem kleineren Kreis. Konstruieren Sie einen Kreis, der den Punkt $A$ enthält und die beiden Kreise $k$ und $l$ berührt.

Problemlösung: Sei $s$ der Halbmesser des kleineren Kreises $k$ und sei $r$ der Halbmesser des größeren Kreises $l$ und sei $S$ der gemeinsame Mittelpunkt der beiden Kreise. Dann zeichnen wir die Gerade $SA$ durch zwei Punkte, wobei wir einen beliebigen Punkt $A$ auf dem kleineren Kreis $k$ wählen. Diese Gerade hat dann zwei Schnittpunkte $X$ und $Y$ mit dem größeren Kreis $l$. Jetzt können wir zwei Kreise $m_1$,$m_2$ mit den Mittelpunkten $B$ und $C$ und den Halbmessern $XB$ und $YC$ konstruieren. Die Maße für die Halbmesser sind $\frac{r+s}{2}$ und $\frac{r-s}{2}$. Diese Konstruktion führen wir mit GeoGebra DGS durch.

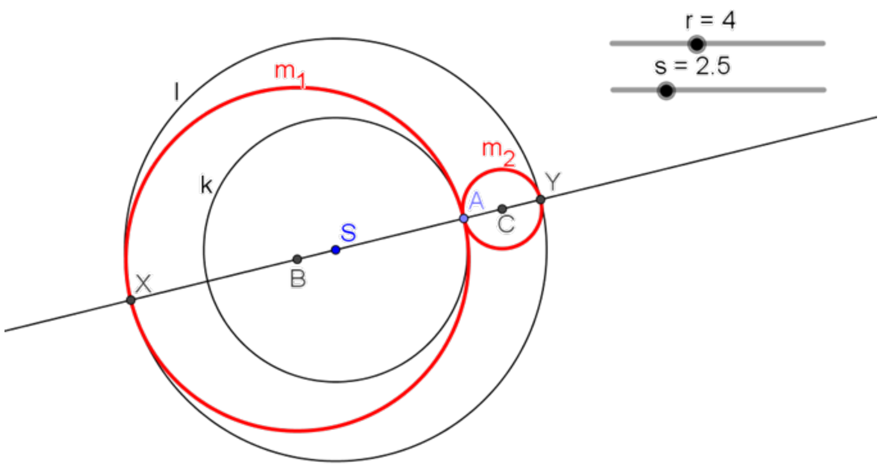


Abb. 1: Konstruktive Lösung der Aufgabe 1 mit GeoGebra

Auf den Aspekt, dass Konstruktionsprotokolle „eine vortheoretische Basis für die Idee des Algorithmus“ darstellen, haben Peter Bender und Alfred

Schreiber in ihren Betrachtungen zu universellen Ideen der Geometrie hingewiesen (Bender & Schreiber, 1985). GeoGebra bietet nun die großartige Möglichkeit, das Konstruktionsprotokoll zur Konstruktiven Lösung des Problems aufzurufen.

Konstruktionsprotokoll

| Nr. | Name | Beschreibung | Wert |
|---|---|---|---|
| 1 | Zahl r | | r = 4 |
| 2 | Kreis l | $x^2 + y^2 = r^2$ | l: $x^2 + y^2 = 16$ |
| 3 | Zahl s | | s = 2.5 |
| 4 | Kreis k | $x^2 + y^2 = s^2$ | k: $x^2 + y^2 = 6.25$ |
| 5 | Punkt S | | S = (0, 0) |
| 6 | Punkt A | Punkt auf k | A = (2.32, 0.94) |
| 7 | Gerade SA | Linie S, A | SA: -0.94x + 2.32y = 0 |
| 8 | Punkt X | Schnittpunkt von l, SA | X = (-3.71, -1.5) |
| 8 | Punkt Y | Schnittpunkt von l, SA | Y = (3.71, 1.5) |
| 9 | Punkt B | Mittelpunkt von X, A | B = (-0.7, -0.28) |
| 10 | Punkt C | Mittelpunkt von Y, A | C = (3.01, 1.22) |
| 11 | Kreis $m_2$ | Kreis durch Y mit Mittelpunkt C | $m_2$: $(x - 3.01)^2 + (y - 1.22)^2 = 0.56$ |
| 12 | Kreis $m_1$ | Kreis durch X mit Mittelpunkt B | $m_1$: $(x + 0.7)^2 + (y + 0.28)^2 = 10.56$ |

Abb. 2: GeoGebra Konstruktionsprotokoll zur Problemlösung von Aufgabe 1

Ausgehend von dieser Konstruktionsbeschreibung können wir nun mit dem GeoGebra CAS eine allgemeine Problemlösung symbolisch programmieren (vgl. Fuchs & Plangg, 2018).

CAS

| | |
|---|---|
| 1 | x^2+y^2=s^2<br>→ $x^2 + y^2 = s^2$ |
| 2 | x^2+y^2=r^2<br>→ $x^2 + y^2 = r^2$ |
| 3 | A:=(u,sqrt(r^2-u^2))<br>→ $A := \left(u, \sqrt{r^2 - u^2}\right)$ |
| 4 | S:=(0,0)<br>→ $S := (0, 0)$ |
| 5 | A-S<br>→ $\left(u, \sqrt{r^2 - u^2}\right)$ |
| 6 | n:=(-sqrt(r^2-u^2),u)<br>→ $n := \begin{pmatrix} -\sqrt{r^2 - u^2} \\ u \end{pmatrix}$ |
| 7 | SA:-sqrt(r^2-u^2)*x+u*y=0<br>→ $SA: u\,y - x\,\sqrt{r^2 - u^2} = 0$ |
| 8 | Schneide(SA,x² + y² = s²)<br>→ $\left\{\left(u\,\frac{s}{r}, \sqrt{r^2 - u^2} \cdot \frac{s}{r}\right), \left(-u\,\frac{s}{r}, -\sqrt{r^2 - u^2} \cdot \frac{s}{r}\right)\right\}$ |
| 9 | X:=(u s / r, sqrt(r² - u²) s / r)<br>→ $X := \left(s\,\frac{u}{r}, s\,\frac{\sqrt{r^2 - u^2}}{r}\right)$ |
| 10 | Y:= (-u s / r, -sqrt(r² - u²) s / r)<br>→ $Y := \left(-s\,\frac{u}{r}, -s\,\frac{\sqrt{r^2 - u^2}}{r}\right)$ |

Abb. 3: Allgemeine symbolische Problemlösung mit GeoGebra CAS

## 3. Zusammenfassung

Die wichtige Rolle, die Softwaresysteme wie DGS und CAS bei der Entwicklung, Förderung und Unterstützung mathematischen Denkens spielen, wollen wir abschließend zusammenfassen:

- Visualisierungen mit Hilfe von DGS können Studierenden einen einfachen, aber wirksamen Zugang zur Entdeckung von Sachverhalten und zum Problemlösen liefern (vgl. Gunčaga & Fuchs, 2019). Zudem können dynamische Änderungen mit DGS sichtbar gemacht werden.
- Im Mathematikstudium werden mathematische Modelle entwickelt. Mit dem Einsatz von DGS für Visualisierungen und CAS für Berechnungen und vor allem symbolische Manipulationen im Unterricht gewinnen die Bildung mathematischer Begriffe und das Verständnis für mathematische Verfahren an Nachhaltigkeit.

Bemerkung: Der Beitrag ist unterstützt mit dem Grant KEGA 020KU-4/2018 (Ján Gunčaga, Pädagogische Fakultät der Comenius Universität in Bratislava, Slowakei).

## Literatur

Bender, P. & Schreiber, A. (1985). *Operative Genese der Geometrie*. HPT: Wien & B. G. Teubner: Stuttgart.

Gunčaga, J. (2011). *Analysisunterricht unter dem Lernziel "Mathematische Grundbildung"*. Fribourg: S.É.C.T. (Sciences, Éducation, Cultures, Traditions).

Gunčaga, J. & Fuchs, K. J. (2019). Computer als Hilfsmittel zum Verstehen von Schwellenkonzepten (Threshold Concepts) im Mathematikunterricht. Regensburg: Vortrag auf der 53. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik.

Fuchs, K. J. (2007). Fachdidaktische Studien. In Fuchs, K. J. (Hrsg.). *Schriften zur Didaktik der Mathematik und Informatik an der Universität Salzburg* (S. 171–356). Aachen: Shaker Verlag.

Fuchs, K. J. & Plangg, S. (2018). *Computer Algebra Systeme in der Lehrer(innen)bildung.* WTM Verlag: Münster.

Lehrplan ISCED3 für slowakischen Gymnasien. In http://www.statpedu.sk/files/articles/dokumenty/statny-vzdelavaci-program/matematika isced3a.pdf

Močnik, F. (1856). *Mértani nézlettan (Anschauliche Geometrie).* Pest: Lampel Róbert Sajátja.