Moritz HERZOG, Essen & Annemarie FRITZ, Essen

Konzeptuelles Stellenwertverständnis als Prädiktor für Rechenfertigkeiten

Angesichts der Bedeutung von Rechenfertigkeiten für Lebensperspektiven rücken Prädiktoren für Rechenfertigkeiten – insbesondere hinsichtlich der Grundrechenarten – in den Fokus der Forschung. Bei der Erfassung von Rechenfertigkeiten kommen neben reinen Leistungstests in den Grundrechenarten auch curriculare Tests zum Einsatz.

Vorhersage von Rechenfertigkeiten

Ein Prädiktor für Rechenfertigkeiten, der regelmäßig diskutiert wird, ist das fundierte Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems (z.B. Aunio & Niermvierta, 2010). So konnten Gebhart et al. (2012) Korrelationen zwischen Stellenwertverständnis und Rechenleistungen in den Basisoperationen feststellen. Auch die zehnerbasierte Darstellung von Zahlen mit Mehrsystemblöcken korrelierte substantiell mit Rechenfertigkeiten und konnte diese vorhersagen (Hiebert & Wearne, 1996).

Umgekehrt sind Schwierigkeiten mit dem Stellenwertverständnis typische Symptome von Kindern mit Rechenschwierigkeiten (Moser Opitz, 2007). Lambert und Moeller (2019) stellten höhere Reaktionszeiten und Fehlerraten bei Drittklässlern mit Rechenschwierigkeiten im Vergleich zu durchschnittlich rechnenden Kindern bei Rechenaufgaben mit und ohne Zehnerübergang fest, wobei die Unterschiede zwischen den Gruppen bei den Aufgaben mit Übergang wesentlich ausgeprägter waren.

Stellenwertverständnis umfasst auch das korrekte Übertragen von Zahlen in verbaler („Zweiundvierzig“), arabischer (42) und Mengendarstellung (z.B. mit Mehrsystemblöcken oder auf dem Zahlenstrahl), das sogenannte Transcoding (Moura et al., 2013). Verschiedene Studien wiesen Transcoding als starken Prädiktor von Rechenfertigkeiten am Ende der zweiten Klasse nach (Moeller et al., 2011). Kinder mit Rechenschwierigkeiten zeigten erheblich höhere Fehlerraten beim Transcoding verglichen mit durchschnittlich rechnenden Kindern (Moura et al., 2013).

Stellenwertverständnis

In Anlehnung an Rittle-Johnson und Schneider (2015) kann zwischen (eher) prozeduralem und (eher) konzeptuellem Stellenwertverständnis unterschieden werden (Houdement & Tempier, 2019; van de Walle et al., 2004). Unter prozeduralem Stellenwertverständnis können demnach in erster Linie

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

Leistungen verstanden werden, die auf der dezimalen Struktur von Zahlen basieren, wie etwa Transcoding und sogenannte kanonische Zahldarstellungen (Ross, 1989; van de Walle et al., 2004). Demgegenüber umfasst das konzeptuelle Stellenwertverständnis vornehmlich die Relation der Bündeleinheiten Einer, Zehner etc., die die fortgesetzte Bündelung erst ermöglicht. Dazu gehören beispielsweise Aufgaben zum Bündeln und Entbündeln sowie non-kanonische Darstellungen (Ross, 1989). Auch wenn grundsätzlich von einer Interaktion von prozeduralem und konzeptuellem Stellenwertverständnis auszugehen ist (Rittle-Johnson & Schneider, 2015), zeigen aktuelle Studien, dass vor allem das konzeptuelle Stellenwertverständnis Schülerinnen und Schüler vor Schwierigkeiten stellt (Herzog et al., 2019; Houdement & Tempier, 2019; Moura et al., 2013).

Aufbauend auf einer breiten Literaturgrundlage haben Herzog et al. (2019) ein Entwicklungsmodell vorgestellt, das die Entwicklung konzeptuellen Stellenwertverständnisses in fünf hierarchisch aufeinander aufbauenden Levels organisiert. Die Levelhierarchie wurde in der dritten und vierten Klasse empirisch geprüft (Herzog et al., 2019). Die Levels lassen sich durch spezifische Vorstellungen zur dezimalen Struktur und der Relation der Bündeleinheiten umschreiben:

- *Prädekadisches Level*: Kinder nehmen Zahlen als nicht dekadisch strukturierte Entitäten war. Sie können Zahlen mitunter zerlegen, erkennen jedoch keine dezimalen Bündeleinheiten in ihnen.
- *Level I*: Kinder können Einer, Zehner etc. benennen und Zahlen kanonisch zerlegen. Damit sind ihnen auch Transcodingleistungen mit non-kanonischen Zerlegungen möglich.
- *Level II*: Kinder können Einer und Zehner bündeln und entbündeln, sofern ihnen konkrete Zahldarstellungen (visuell oder haptisch) mit geeignet strukturiertem Material (z.B. Mehrsystemblöcke) vorliegen.
- *Level III*: Kinder können Einer und Zehner auch ohne Materialdarstellungen in einander überführen. Darüber hinaus können sie größere Bündeleinheiten nur mit konkretem Material in Relation setzen.
- *Level IV*: Kinder können dezimale Bündeleinheiten bündeln und entbündeln, ohne auf konkrete Materialdarstellungen zurückgreifen zu müssen.

Mit Blick auf die eingangs dargestellten Studien wird deutlich, dass vor allem das prozedurale Stellenwertverständnis in Prädiktorstudien fokussiert wurde. In dieser Studie soll daher untersucht werden, inwieweit konzeptuelles Stellenwertverständnis in den Klassen 3 und 4 (curriculare) Rechenfertigkeiten vorhersagen kann.

Methode

Insgesamt N=424 Kinder (213 weiblich) der Klassen 3 (n=241, 119 weiblich) und 4 (n=183, 94 weiblich) aus fünf verschiedenen Grundschulen in NRW nahmen an einer Längsschnittstudie über ein Schuljahr hinweg teil. Dabei wurden zu Beginn des Schuljahres (T1) erfasst:

- Konzeptuelles Stellenwertverständnis (STW), basierend auf dem Modell von Herzog et al. (2019) mit 36 Items ohne Zeitbegrenzung.
- Rechenleistung (HRT) mit der Subskala „Rechenoperationen" aus dem Heidelberger Rechentest 1-4.
- Addition einstelliger Zahlen (AE) mit 50 Aufgaben, angelehnt an den HRT innerhalb einer Minute.
- Addition zweistelliger Zahlen mit (AZm) und ohne Zehnerübergang (AZo) mit jeweils 40 Aufgaben, angelehnt an den HRT in zwei Minuten.

Am Ende des Schuljahres (T2) wurden die Rechenfertigkeiten mit der Subskala „Arithmetik" des DEMAT 3 bzw. 4 erfasst.

In einem linearen Regressionsmodell wurde geprüft, inwieweit die Maße zu T1 die Rechenfertigkeiten zu T2 vorhersagen können. Tabelle 1 zeigt die Modellparameter für die Klassen 3 und 4. In beiden Klassen prädiktierte das konzeptuelle Stellenwertverständnis spätere Rechenfertigkeiten in besonderem Maße und in der dritten Klasse am stärksten. Auffällig sind die Unterschiede in der Varianzaufklärung zwischen den Jahrgangsstufen, die geringe prädiktive Kraft des HRT in Klasse 3 sowie die negativen (wenn auch nicht signifikanten) Koeffizienten hinsichtlich des Abrufs einstelliger Rechenfakten.

	Klasse 3 (R^2=.313)			Klasse 4 (R^2=.454)		
Variablen	β	T	*p*	β	T	*p*
STW	.293	4.701	<.001	.254	4.244	<.001
HRT	-.049	-.743	.458	.317	3.939	<.001
AE	-.115	-1.556	.121	-.043	-.578	.564
AZo	.280	3.112	.002	.130	1.461	.146
AZm	.238	2.987	.003	.194	2.267	.025

Tab. 1: Parameter der Regressionsmodelle. STW=konzeptuelles Stellenwertverständnis, HRT=Rechenleistung, AE= Addition einstellig, AZo= Addition zweistellig ohne Übertrag, AZm= Addition zweistellig mit Übertrag.

Diskussion

Die Ergebnisse zeigen, dass konzeptuelles Stellenwertverständnis Rechenfertigkeiten über ein Schuljahr hinweg in den Jahrgangsstufen 3 und 4 vorhersagen kann. Dies unterstreicht die in bisherigen Studien gezeigte Bedeutung von stellenwertbezogenem Wissen für Rechenfertigkeiten. Da Rechenleistung und insbesondere zweistellige Additionsaufgaben mit Zehnerübergang in das Regressionsmodell eingeschlossen wurden, besitzt die Vorhersagekraft anscheinend auch über Rechenleistungen und Abrufstrategien hinaus Gültigkeit. Stellenwertkonzepte dürfen daher als spezifischer und direkter Prädiktor von Rechenfertigkeiten betrachtet werden.

Literatur

Aunio, P. & Niemivierta, M. (2010). Predicting children's mathematical performance in grade one by early numeracy. *Learning and Individual Differences*, 20, 427–435.

Gebhardt, M., Zehner, F. & Hessels M. G. P. (2012). Basic Arithmetical Skills of Students with Learning Disabilities in the Secondary Special Schools. An Exploratory Study covering Fifth to Ninth Grade. *Frontline Learning Research,* 3, 50-63.

Herzog, M., Ehlert, A. & Fritz, A. (2019). Development of resilient place value concepts. In A. Fritz, V. Haase & P. Räsänen (Hrsg.), *The International Handbook of Mathematical Learning Difficulties* (S. 561–580). New York: Springer.

Hiebert, J. & Wearne, D. (1996). Instruction, Understanding, and Skill in Multidigit Addition and Subtraction. *Cognition and instruction,* 14 (3), 251-283.

Houdement, C. & Tempier, F. (2019). Understanding place value with numeration units. *ZDM Mathematics Education,* 51(1), 25-37.

Lambert, K. & Moeller, K. (2019). Place-value computation in children with mathematics difficulties. *Journal of Experimental Child Psychology,* 178, 214–225.

Moeller, K., Pixner, S., Zuber, J., Kaufmann, L. & Nuerk, H.-C. (2011). Early place-value understanding as a precursor for later arithmetic performance – a longitudinal study on numerical development. *Research in Developmental Disabilities,* 32(5), 1837–1851.

Moser Opitz, E. (2007). *Rechenschwäche/Dyskalkulie.* Bern: Haupt.

Moura, R., Wood, G., Pinheiro-Chagas, P., Lonnemann, J., Krinzinger, H., Willmes, K. & Haase, V. G. (2013). Transcoding abilities in typical and atypical mathematics achievers: the role of working memory and procedural and lexical competencies. *Journal of Experimental Child Psychology,* 116, 707–727.

Rittle-Johnson, B. & Schneider, M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. In R. C. Kadosh & A. Dowker (Hrsg.), *The Oxford handbook of numerical cognition* (S. 1118–1134). New York: Oxford University Press.

Ross, S. H. (1989). Parts, Wholes and Place Value: A Developmental View. *The Arithmetic Teacher,* 36(6), 47-51.

Van de Walle, J. A., Karp, K. & Bay-Williams, J. M. (2004): *Elementary and Middle School Mathematics. Teaching Developmentally.* Boston: Pearson.