

Jan Franz WÖRLER, Würzburg

Wie sich eine Hemdnaht als periodische Folge mittels 3D-Druck mechanisch programmieren lässt

Schauen Sie sich Ihr Hemd, Ihre Hose oder Ihren Pullover genau an – finden Sie an dem Kleidungsstück verschiedene Nähte? Wenn ja, worin unterscheiden sich diese Nähte? Liegt es nur am verwandten Faden, oder sind die von der Naht erzeugten Muster in ihren Eigenschaften unterschiedlich, oder wie?

Mathematischer gefragt: Stellen Sie sich die jeweilige Naht als unendlich langes Band vor – welche Symmetrien weist dieses Band auf? Können Sie es, im Sinne eines Bandornaments, den sieben Friesgruppen (Quaisser, 1994) zuordnen? Und finden Sie – zum Beispiel in Ihrem Kleiderschrank – für jede der sieben Gruppen mindestens eine Naht als Repräsentanten?

Vielleicht ist gar die umgekehrte Frage, nämlich wie diese Nähte erzeugt wurden, aus mathematischer Sicht noch reichhaltiger, weil dazu neben Symmetriebetrachtungen auch Fragen der Raumgeometrie und Arithmetik eine Rolle spielen. Lassen wir uns also darauf ein.

Maschinelles Nähen: Von Stichmustern und Musterkurven

Üblicherweise werden Nähte heute von Nähmaschinen erzeugt; vielleicht haben Sie zu Hause auch eines der vielen Modelle? Die meisten Haushaltsnähmaschinen bieten eine Auswahl an Variationen von Nähten an – man spricht von *Stichmustern*. Diese Stichmuster werden in mechanischen Nähmaschinen von speziellen Bauteilen, den *Musterkurven* (oder auch *Musterscheiben*) erzeugt (vgl. Wörler, 2020).

Eine Musterkurve ist eine flache Scheibe, die sich um eine Rotationsachse dreht. Der Radius $r(\phi)$ der Scheibe variiert abhängig vom Kurvenwinkel $0 \leq \phi < 360^\circ$ zwischen einem minimalen und einem maximalen Wert $r_{\min} \leq r(\phi) \leq r_{\max}$. Bei ihrer Drehung im Inneren der Nähmaschine läuft der Rand der Scheibe an einem elastisch gelagerten Taster vorbei, der den aktuellen Radius $r(\phi)$ mechanisch erfasst und in eine Auslenkung der Nähnaedel überführt. Damit dient jede Musterkurve letztlich dazu, ein Stichmuster (und damit eine Klasse von Nähten) zu definieren – und damit als mechanisches Programm der Maschine (auch *Programmscheibe* genannt).

Beim Nähen wird der Stoff über die Grundplatte der Maschine geschoben. Sie definiert – in Analogie zur „Zeichenebene“ – die *Nähebene*, die von zwei senkrecht aufeinander stehenden Vektoren x und y aufgespannt wird. Dabei sorgt die Maschine über den *Transporteur* (auch: *Stoffschieber*) selbst für

einen periodischen Vorschub des Stoffs in x -Richtung, während die von der Musterscheibe induzierte Nadelauslenkung in y -Richtung verläuft. Erst in der Überlagerung von Stoffvorschub und Nadelauslenkung entsteht beim Nähen die Naht bzw. das entsprechende Muster.

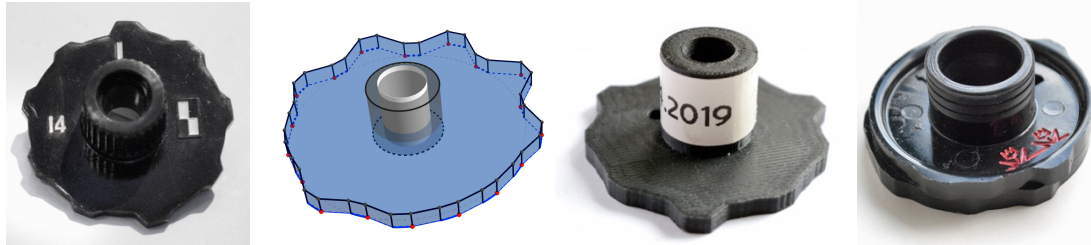


Abb. 1: industrielle Musterscheibe zum Auswechseln (li.), Konstruktion einer eigenen Scheibe (GeoGebra, 2. v. l.), 3D-Ausdruck einer selbstkonstruierten Scheibe (2. v. r.), industrielle Scheibe mit zweiter Programmschicht für Transporteur-Steuerung (re.)

Fall 1: konstanter Vorschub

An den meisten Haushaltsnäähmaschinen lässt sich der Wert für den Vorschub v_x in gewissen Grenzen einstellen. Wir gehen im Folgenden zunächst davon aus, dass v_x beim Nähen auf einem konstanten Wert gehalten wird.

Dann ist es allein die Folge $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ der y -Nadelauslenkungen, die für die geometrischen Eigenschaften der Naht verantwortlich ist, denn eine Naht lässt sich als Folge von (Einstich-)Punkten $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in der Näheebene auffassen, zwischen denen der Faden (notwendigerweise) geradlinig verläuft. Dabei ist $P_i(x_i|y_i)$ für alle $i \in \mathbb{N}$, wobei wegen des konstanten Vorschubs v_x für die x -Koordinaten $x_i = x_0 + i \cdot v_x$ mit einem Startpunkt $P_0(x_0|y_0)$ gilt.

Da sich Stichmuster nach einer endlichen Anzahl von Einstichen wiederholen, die Folge $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sich also als periodische Folge der Periodenlänge m beschreiben lässt, genügt als „mechanischer Programmcode“ eines Stichmusters eine endliche Teilfolge $(y_i)_{1 \leq i \leq m}$. Übliche Periodenlängen sind je nach Maschinenhersteller $m \in \{2, 3, 6, 9, 12, 18\}$.

Just diese endlichen Teilfolgen finden wir auf den Musterkurven wieder: als (Ab-)Folge von Radien $(r_i)_{1 \leq i \leq m}$. Ein Beispiel: Bei der *Ideal Automatik 775* weisen Musterkurven (vgl. Abb. 1) je 18 gleichgroße Sektoren auf, und der Rand eines jeden Sektors s_i beinhaltet einen Kreisbogen vom Radius r_i , durch den die zugehörige y -Auslenkung y_i der Nähnaedel festgelegt wird. Liegen in benachbarten Sektoren s_i und s_{i+1} verschiedene Scheibenradien vor, so gibt es Übergangsstellen, die stetig r_i in r_{i+1} überführen. Der Rand einer solchen Scheibe besteht also aus 18 Kreisbögen von (potentiell unterschiedlichen) Radien $(r_i)_{1 \leq i \leq 18}$ und 18 dazwischenliegenden Übergangsbereichen. Doch wozu braucht es die Kreisbögen? Beim Nähen sticht die Naedel in den Stoff, sinkt tiefer in ihn ein, hebt sich anschließend und verlässt den

Stoff wieder. Im Zeitraum zwischen Einstich und Verlassen muss einerseits der Stoff ruhen (sonst würde er an der Nadel reißen), weshalb der Transporteur den Vorschub in x -Richtung unterbricht. Andererseits dreht sich die Musterscheibe im Inneren der Maschine, angetrieben vom Maschinenmotor, bei den meisten Maschinen weiter, so dass für diesen Zeitraum auch die y -Nadelauslenkung konstant gehalten werden muss – andernfalls würde auch hier der Stoff beschädigt. Dieses Konstanthalten der y -Auslenkung wird über die Kreisbögen der Musterscheiben, also Teilsektoren mit konstantem Scheibenradius, sichergestellt.

Eigene Muster entwickeln, „programmieren“ und nähen

Die oben dargestellten Zusammenhänge lassen sich nutzen, um eigene Stichmuster zu entwickeln und zugehörige Musterscheiben zu konstruieren. Dabei können etwa folgende Fragen von Interesse sein:

- Welche Art von Naht erzeugt eine drehsymmetrische Musterscheibe? Wie äußern sich achsensymmetrische Scheiben im Erscheinungsbild der zugehörigen Naht?
- Kann für jede der sieben Symmetriegruppen von Bandornamenten eine Musterscheibe konstruiert werden, die eine entsprechende Naht erzeugt? Wenn ja, wie konkret? Wenn nein, warum nicht?
- Wenn m die Anzahl an Kreisbögen/Sektoren auf einer Musterscheibe ist, Muster welcher Periodenlänge lassen sich damit nähen?
- Kann man eine Nähmaschine mit Steuerscheibe als „Funktionsplotter“ für periodische Funktionen verwenden? Wenn ja, welche Einschränkungen gibt es, welche Funktionen sind (angenähert) umsetzbar?

Solche Fragen können auf Basis theoretischer Überlegungen untersucht werden; denkbar ist aber auch ein experimenteller Zugang, sofern die Zusammenhänge zwischen Scheibengeometrie, -radien und Stichmuster mittels dynamischer Konstruktionen simuliert werden (vgl. Wörler, 2020).

Das Überführen dieser Konstruktionen in Raumgeometrie- oder CAD-Software eröffnet die Möglichkeit, Musterscheiben selbst zu konstruieren, über 3D-Druck oder Online-CNC-Fräsdienste physisch zu erzeugen und als Bauteil – nach kleineren handwerklichen Nacharbeiten (vgl. Fernández Santana, 2019) – in reale Nähmaschinen zu integrieren (vgl. Abb. 1). Auf diese Weise lassen sich die Überlegungen in der Realität validieren.

Dabei ist es hilfreich, dass viele Automatic-Nähmaschinen von Haus aus mit einem Satz von auswechselbaren Musterscheiben geliefert werden, die sich, wie selbsterzeugte Scheiben, durch eine Klappe im Gehäuse einlegen bzw.

austauschen lassen. In anderen Maschinenmodellen laufen mehrere Scheiben als starr kombinierter Block, welcher sich ebenfalls virtuell nachbilden, modifizieren, als physisches Bauteil produzieren und realiter einlegen lässt.

Fall 2: Scheibenkombinationen, Automatic-Vorschub

Aus technischer wie mathematischer Sicht weitaus anspruchsvoller – sowohl im Hinblick auf die Analyse wie auch die Konstruktion eigener Muster und Musterscheiben – sind Nähmaschinenmodelle, die die Überlagerung mehrerer Musterscheibenbefehle zulassen (z. B. *Pfaff 1215*, vgl. [Pfaff], S. 15). Darüber hinaus gibt es auch solche (z. B. *Adler 532*, vgl. [Adler], S. 38), bei denen der Vorschub v_x nicht, wie oben beschrieben, konstant bleibt, sondern durch eine separate Musterscheibe oder eine zweite „Programmschicht“ innerhalb einer Scheibe gesteuert wird (vgl. Abb. 1), wobei Vorwärts- und Rückwärtslauf des Vorschubs während einer Periode wechseln können; (nur) dann ist es möglich, dass sich der Nähfaden selbst kreuzt und die Eindeutigkeit der Zuordnung $x_i \rightarrow y_i$ bzw. $x_i \rightarrow r_i$ verloren geht.

Fazit

Es gibt auch heute noch eine Reihe von Nähmaschinenmodellen, die Musterscheiben zur mechanischen Kodierung von Stichmustern verwenden. Damals wie heute sind diese Scheiben mechanische Programme der Maschinen, weshalb sie zum Teil als *Programmscheiben* bezeichnet werden. Solche Bauteile aus geometrischer (Symmetrien, Ornamentklassen ...) wie auch arithmetischer (Teilerrelationen, Restklassen ...) Perspektive zu analysieren, kann tief hinein in spannende mathematische Fragen führen. Das Konstruieren eigener Stichmuster und „Programmieren“ von Maschinen über zugehörige Musterscheiben spricht neben raumgeometrischen Aspekten auch Facetten des mathematischen Modellierens an und kann seinen Abschluss in der realen Validierung des Konstruktions- und Produktionsprozesses finden: Indem die eigene Musterscheibe in die Maschine eingelegt und der Nähmaschinenmotor gestartet wird. Probieren Sie es aus – kreieren Sie Ihre Naht!

Literatur

- [Adler] (o. J.). *Adler 530, 531, 532: Gebrauchsanleitung*. [vermutl. Bielefeld, um 1975]
- Quaisser, E. (1994). *Diskrete Geometrie*. Heidelberg u. a.: Spektrum.
- Fernández Santana, F. (2019). *Entwicklung und Erstellung von Nähmaschinenmusterscheiben für mathematische Stichmuster* (Zulassungsarbeit für das Lehramt an bayerischen Realschulen, betreut durch Jan F. Wörler). Universität Würzburg.
- [Pfaff] (o. J.). *Pfaff synchronomatic 1215: instruction book*. [vermutl. Karlsruhe, nach 1980]
- Wörler, J. F. (2020). Aus dem mathematischen Nähkästchen: Wie man mit Nähmaschine und 3D-Drucker funktionale Zusammenhänge auf Papier bringt. *Der Mathematikunterricht*, 66(3), 15–23.